
ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Η μέθοδος VIKOR

Εισαγωγή

Πολύ συχνά, αρκετά πρακτικά προβλήματα απόφασης χαρακτηρίζονται από αντικρουόμενα και διαφορετικής κλίμακας κριτήρια, ενώ είναι πολύ πιθανό να μην υπάρχει λύση που να τα ικανοποιεί όλα ταυτόχρονα. Για την αντιμετώπισή τους, έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι πολυκριτήριας ανάλυσης, οι οποίες παρέχουν ικανοποιητικές λύσεις, μεταξύ αυτών και η μέθοδος VIKOR¹.

Η μέθοδος VIKOR (Opricovic, 1998, Opricovic & Tzeng, 2004, 2007) εστιάζει στην κατάταξη και την επιλογή από ένα σύνολο διαθέσιμων εναλλακτικών και προσδιορίζει μια λύση συμβιβασμού (compromise solution), υποστηρίζοντας τον αποφασίζοντα να καταλήξει σε μια τελική απόφαση για ένα πρόβλημα με αντικρουόμενα κριτήρια. Για τον σκοπό αυτό, η λύση προσδιορίζεται βάσει της «εγγύτητας» από μια βέλτιστη ιδεατή λύση, χρησιμοποιώντας ως μέτρο αξιολόγησης τη γνωστή L^p -μετρική με τη μορφή μιας συνάρτησης συνάθροισης. Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δίνει τη δυνατότητα στον αποφασίζοντα να αντισταθμίζει - κατά το δοκούν - δύο διαφορετικές οπτικές, ανάλογα εάν στη στρατηγική του θέλει μια καλή επίδοση στο σύνολο των κριτηρίων ($p = 1$), ή αν επιθυμεί να «κρατήσει χαμηλά» τον βαθμό δυσαρέσκειας σε κάθε κριτήριο ξεχωριστά ($p = \infty$).

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε πολλές εφαρμογές, η μέθοδος VIKOR συγκρίνεται με τη γνωστή μέθοδο TOPSIS, αν και υιοθετεί διαφορετική συνάρτηση συνάθροισης και διαφορετική μέθοδο κανονικοποίησης. Η ειδοποιός διαφορά εντοπίζεται στο εξής: η μέθοδος TOPSIS λαμβάνει υπόψη αμφότερες τη θετική και την αρνητική ιδεατή λύση. Αντίθετα, η μέθοδος VIKOR εστιάζει μόνο στη θετική ιδεατή λύση. Επομένως, καθώς

¹ Οι βασικές αρχές της μεθόδου αναπτύχθηκαν από τον Serafim Opricovic στη διδακτορική του διατριβή (1979) και μια πρώτη εφαρμογή της δημοσιεύθηκε το 1980 (Duckstein & Opricovic). Το όνομα VIKOR εμφανίστηκε σε ένα συνέδριο το 1990 και προέρχεται από το σερβικό “ViseKriterijumska Optimizacija I Kompromisno Resenje”, που μεταφράζεται ως «Πολυκριτήρια Βελτιστοποίηση και Λύση Συμβιβασμού».

στοχεύει μόνο στη μεγιστοποίηση του οφέλους², ο κίνδυνος μιας απόφασης θεωρείται λιγότερο σημαντικός. Με άλλα λόγια, η μέθοδος VIKOR απευθύνεται σε λιγότερο επιφυλακτικούς αποφασίζοντες.

Μεθοδολογικό πλαίσιο

Η μέθοδος VIKOR αναπτύχθηκε αρχικά για την επίλυση του διακριτού προβλήματος απόφασης με πολλαπλά κριτήρια - χαρακτηριστικά. Τέτοιου είδους προβλήματα περιγράφονται από έναν πίνακα απόφασης, όπως είναι ο ακόλουθος:

	C_1	C_2	...	C_n
A_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1n}
A_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2n}
...
A_m	f_{m1}	f_{m2}	...	f_{mn}

(Πίνακας Απόφασης)

όπου A_1, A_2, \dots, A_m είναι οι διαθέσιμες εναλλακτικές, C_1, C_2, \dots, C_n είναι τα κριτήρια και f_{ij} είναι η επίδοση της εναλλακτικής A_i έναντι του κριτηρίου C_j . Δίνονται επίσης τα βάρη

$$[w_1, w_2, \dots, w_n]$$

που εκφράζουν τη σχετική σπουδαιότητα των κριτηρίων και ικανοποιούν τα εξής:

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1 \text{ και } w_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Το μοντέλο της VIKOR περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

1. Προσδιορισμός της καλύτερης και της χειρότερης επίδοσης f_j^* και f_j^- , αντίστοιχα, για κάθε κριτήριο $C_j, j = 1, \dots, n$.

- Αν το j -στο κριτήριο εκφράζει κάποιο όφελος, τότε

$$f_j^* = \max_i f_{ij}, \quad f_j^- = \min_i f_{ij}$$

- Αλλιώς, αν το κριτήριο εκφράζει κάποιο κόστος, τότε

$$f_j^* = \min_i f_{ij}, \quad f_j^- = \max_i f_{ij}$$

2. Υπολογισμός των τιμών S_i και $R_i, i = 1, \dots, m$, από τις σχέσεις

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \frac{|f_j^* - f_{ij}|}{|f_j^* - f_j^-|}$$

2 Με την έννοια ότι επιδιώκεται μόνο η προσέγγιση της θετικής ιδεατής λύσης.

$$R_i = \max_j w_j \frac{|f_j^* - f_{ij}|}{|f_j^* - f_j^-|}$$

3. Υπολογισμός των τιμών $Q_i, i = 1, \dots, m$, από τη σχέση

$$Q_i = \nu \frac{(S_i - S^*)}{(S^- - S^*)} + (1 - \nu) \frac{(R_i - R^*)}{(R^- - R^*)}$$

όπου

$$S^* = \min_i S_i, \quad S^- = \max_i S_i$$

$$R^* = \min_i R_i, \quad R^- = \max_i R_i$$

Η παράμετρος $\nu \in [0,1]$ εκφράζει το βάρος της στρατηγικής του αποφασίζοντα. Με άλλα λόγια, εκφράζει τη σχετική σπουδαιότητα της στρατηγικής «συνολική χρησιμότητα» έναντι της στρατηγικής «min-max βαθμός δυσαρέσκειας», όπως θα δούμε στη συνέχεια. Συνήθως, επιλέγεται $\nu = 0.5$.

4. Διαμορφώνουμε τρεις λίστες κατάταξης με βάση τις τιμές S, R και Q (στοχεύουμε στη μικρότερη τιμή).
5. Η εναλλακτική A' που αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή Q προτείνεται ως λύση συμβιβασμού (compromise solution), εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες:
- **C1 (Συγκριτικό Πλεονέκτημα):**

$$Q(A'') - Q(A') \geq DQ$$

όπου A'' είναι η εναλλακτική που βρίσκεται στη δεύτερη θέση της κατάταξης ως προς τα Q ,

$$DQ = \frac{1}{m-1}$$

και m είναι ο αριθμός των εναλλακτικών.

- **C2 (Ευστάθεια κατά τη Λήψη Απόφασης):** Η εναλλακτική A' πρέπει, επίσης, να έχει την καλύτερη επίδοση (minimum) ως προς την τιμή S ή/και R . Μια τέτοια λύση θεωρείται ότι είναι ευσταθής κατά τη διαδικασία λήψης απόφασης.
- Αν κάποια από τις παραπάνω συνθήκες δεν ικανοποιείται, εργαζόμαστε ως ακολούθως:
 - Αν μόνο η συνθήκη C2 δεν ικανοποιείται, τότε προτείνεται ως λύση συμβιβασμού το σύνολο:

$$\{A', A''\}$$

- Αν μόνο η συνθήκη C1 δεν ικανοποιείται, τότε προτείνεται ως λύση συμβιβασμού το σύνολο:

$$\{A', A'', \dots, A^{(M)}\}$$

όπου η εναλλακτική $A^{(M)}$ προσδιορίζεται από τη σχέση

$$Q(A^{(M)}) - Q(A') < DQ$$

για το μέγιστο M για το οποίο ισχύει η παραπάνω ανισότητα. Με άλλα λόγια, ως λύση λαμβάνονται οι εναλλακτικές που βρίσκονται στις M καλύτερες θέσεις τις λίστας Q (οι M μικρότερες τιμές). Οι εναλλακτικές αυτές απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από DQ (εγγύτητα).

Η μέθοδος VIKOR αποτελεί ένα αποτελεσματικό εργαλείο για τη λήψη απόφασης υπό την παρουσία πολλαπλών κριτηρίων. Η προκύπτουσα συμβιβαστική λύση είναι γενικά αποδεκτή, αφού εγγυάται τόσο τη μέγιστη συνολική χρησιμότητα (όπως εκφράζεται με την ελαχιστοποίηση του S), όσο και τη διατήρηση σε χαμηλό επίπεδο του βαθμού δυσaréσκειας (regret) ως προς κάθε κριτήριο ξεχωριστά (όπως εκφράζεται με την ελαχιστοποίηση του R). Τέλος, σε πολλά πραγματικά προβλήματα, οι λύσεις συμβιβασμού μπορούν να θεωρηθούν ως η βάση για την εκκίνηση των διαπραγματεύσεων και μπορούν να οδηγήσουν σε μια τελική λύση ύστερα από αμοιβαίες παραχωρήσεις.

Παρατήρηση 1. Όπως ειπώθηκε στην εισαγωγή και παρουσιάστηκε στη μεθοδολογία, η ανάπτυξη της μεθόδου VIKOR βασίζεται στη λεγόμενη L^p -μετρική, η οποία γενικά έχει τη μορφή

$$L_i^p = \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, i = 1, \dots, m \quad (*)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει μια έννοια απόστασης. Ειδικά, η περίπτωση $p = \infty$ εκφράζεται ως εξής:

$$L_i^\infty = \max_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|$$

η οποία επίσης εκφράζει απόσταση. Όπως συνηθίζεται στη βιβλιογραφία, για λόγους οικονομίας, οι παραπάνω δύο διατυπώνονται μαζί σε έναν ενιαίο ορισμό, τον (*).

Για την ακρίβεια, η ποσότητα (*) αποτελεί την κανονικοποιημένη μορφή της πιο γενικής, γνωστής από τη Μαθηματική Ανάλυση, L^p -νόρμας, η οποία ορίζει μια μετρική d στον χώρο \mathbb{R}^n και έχει τη μορφή

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$$

για δύο διανύσματα (x_1, \dots, x_n) και (y_1, \dots, y_n) . Στην περίπτωσή μας, (i) τα διανύσματα είναι κανονικοποιημένα ως προς τις συνιστώσες τους (λόγω διαφορετικών μονάδων στα κριτήρια) και (ii) το ένα διάνυσμα έχει ως συνιστώσες τις καλύτερες επιδόσεις ανά κριτήριο, επομένως είναι σταθερό.

Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $F^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ το διάνυσμα στον \mathbb{R}^n που περιέχει τις καλύτερες επιδόσεις όλων των κριτηρίων (θετική ιδεατή λύση) και με $F_i = (f_{i1}, \dots, f_{in})$ το διάνυσμα των επιδόσεων για την εναλλακτική A_i , τότε η ποσότητα L_i^p εκφράζει

την κανονικοποιημένη απόσταση της επίδοσης της εναλλακτικής από την επίδοση της θετικής ιδεατής λύσης. Για κάθε εναλλακτική, εκφράζει τον βαθμό δυσαρέσκειας για τη «μη υλοποίηση της βέλτιστης ιδεατής λύσης». Επομένως, είναι φυσιολογικό να επιθυμούμε την ελαχιστοποίησή του.

Παρατήρηση 2. Ουσιαστικά, η μέθοδος VIKOR κάνει από κοινού χρήση των δύο ακραίων περιπτώσεων $p = 1$ και $p = \infty$, σταθμίζοντας ωστόσο με δοθέντα βάρη. Ποιοτικά, οι δύο περιπτώσεις έχουν την ακόλουθη ερμηνεία:

- Η λύση που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ποσότητας L_i^1 (ως S_i) αντιστοιχεί στην εναλλακτική με τη μέγιστη χρησιμότητα της πλειονότητας των κριτηρίων (maximum group utility of the majority).
- Η λύση που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της ποσότητας L_i^∞ (ως R_i) εκφράζει μια min-max αντιμετώπιση του βαθμού δυσαρέσκειας (min-max regret). Παρατηρούμε ότι, υιοθετώντας τη $\min(R)$ - εναλλακτική, η απόκλιση από τη βέλτιστη ιδεατή λύση, σε κάθε κριτήριο ξεχωριστά, δε θα υπερβεί ένα ορισμένο όριο.

Η υιοθέτηση της μιας ή της άλλης οπτικής εξαρτάται από την προδιάθεση του αποφασίζοντα. Ακριβώς εδώ, η μέθοδος VIKOR αφομοιώνει τις δύο διαφορετικές οπτικές μέσω του μέτρου Q . Ο αποφασίζων διαμορφώνει τη στρατηγική του εισάγοντας τον συντελεστή ν , ο οποίος αντισταθμίζει κατά περίπτωση τις δύο διαφορετικές προσεγγίσεις.

Βιβλιογραφία

- Duckstein L. & Opricovic S. (1980). Multiobjective optimization in river basin development, *Water Resources Research* 6 (1), 14-20.
- Opricovic, S. (1998). Multicriteria optimization of civil engineering systems. Faculty of Civil Engineering, Belgrade, 2 (1), 5-21 .
- Opricovic, S. , & Tzeng, G. H. (2004). Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS. *European Journal of Operational Research* 156 (2), 445-455 .
- Opricovic, S. , & Tzeng, G. H. (2007). Extended VIKOR method in comparison with outranking methods. *European Journal of Operational Research*, 178 (2), 514-529 .
- Sayadi M.K., Heydari M. & Shahanaghi K (2009). Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers, *Applied Mathematical Modelling*, 33 (5), 2257-2262.