

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλ. Βιομηχανικών Διατάξεων & Συστημάτων Αποφάσεων



Πολυκριτηριακά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων

E02 Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας

Χάρης Δούκας, Παναγιώτης Ξυδώνας & Γιάννης Ψαρράς

Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας

Σκοπός της πολυκριτήριας θεωρίας χρησιμότητας (multiattribute utility theory) είναι η μοντελοποίηση και αναπαράσταση του συστήματος αξιών που συνειδητά ή ασυνείδητα ακολουθεί ο αποφασίζων, μέσω μιας συνάρτησης αξιών/χρησιμότητας $U(\mathbf{g})$. Η συνάρτηση αυτή εκφράζεται βάσει του συνόλου των κριτηρίων αξιολόγησης τα οποία καθορίζουν το αποτέλεσμα της αξιολόγησης:

$$U(\mathbf{g}) = U(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

όπου \mathbf{g} είναι το διάνυσμα των κριτηρίων αξιολόγησης g_1, g_2, \dots, g_n .

Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας

Γενικά, οι συναρτήσεις χρησιμότητας είναι μη γραμμικές αύξουσες συναρτήσεις οριζόμενες στο πεδίο τιμών των αντίστοιχων κριτηρίων αξιολόγησης, οι οποίες ανταποκρίνονται στις ακόλουθες δύο βασικές ιδιότητες.

$$U(\mathbf{g}_x) > U(\mathbf{g}_{x'}) \Leftrightarrow x \succ x', \text{ δηλαδή η εναλλακτική } x \text{ προτιμάται της } x'$$

$$U(\mathbf{g}_x) = U(\mathbf{g}_{x'}) \Leftrightarrow x \sim x', \text{ δηλαδή η εναλλακτική } x \text{ είναι ισοδύναμη της } x'$$

Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας

Η πλέον συνηθισμένη μορφή συνάρτησης χρησιμότητας που χρησιμοποιείται σε ερευνητικό και πρακτικό επίπεδο, είναι η προσθετική:

$$U(\mathbf{g}) = p_1 u_1(g_1) + p_2 u_2(g_2) + \dots + p_n u_n(g_n)$$

όπου:

u_1, u_2, \dots, u_n είναι οι συναρτήσεις μερικών χρησιμοτήτων των κριτηρίων αξιολόγησης (κάθε συνάρτηση μερικής χρησιμότητας $u_i(g_i)$ καθορίζει την αξία/χρησιμότητα των εναλλακτικών δραστηριοτήτων βάση των επιδόσεών τους στο κριτήριο g_i).

p_1, p_2, \dots, p_n είναι οι σταθερές που υποδηλώνουν τη σημαντικότητα (βάρος) των κριτηρίων αξιολόγησης, έτσι ώστε:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας

- Στα πλαίσια της προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας κάθε επίπεδο σημαντικότητας p_i υποδεικνύει την **παραχώρηση** (trade-off) που είναι διατεθειμένος να κάνει ο αποφασίζων σε ένα κριτήριο αναφοράς, προκειμένου να επιτύχει αύξηση μιας μονάδας στο κριτήριο g_i .
- Όπως εύκολα φαίνεται από τη μορφή της προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας, αυτή αποτελεί μια γενίκευση του γνωστού σταθμισμένου μέσου. Ουσιαστικά, ο σταθμισμένος μέσος είναι μια προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας στην οποία όλες οι συναρτήσεις μερικών χρησιμοτήτων είναι γραμμικές.

Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας

- ✓ Οι συντελεστές στάθμισης υποδεικνύουν τους βαθμούς παραχώρησης

Παράδειγμα

- Αξιολόγηση επενδύσεων βάσει απόδοσης (x_1) και κινδύνου (x_2)
 $V(\mathbf{x}) = w_1 x_1 + w_2 (-x_2)$
- Επένδυση E με απόδοση 9% και κίνδυνο 2%. Είμαι διατεθειμένος να αναλάβω λ επιπλέον μονάδες κινδύνου ώστε να κερδίσω μια επιπλέον μονάδα απόδοσης:

$$E = (9, 2) \quad E' = (10, 2 + \lambda)$$

$$E \sim E' \Leftrightarrow 9w_1 - 2w_2 = (9 + 1)w_1 - (2 + \lambda)w_2 \Leftrightarrow \frac{w_1}{w_2} = \lambda$$

Οι παραχωρήσεις είναι σταθερές και δεν εξαρτώνται από τις τιμές των κριτηρίων

Πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας

Μέθοδοι πολυκριτήριας θεωρίας χρησιμότητας

Μέθοδος	Αναφορά
AHP	Saaty (1980)
TOPSIS	Hwang and Yoon (1981)
MAUT	Keeney and Raiffa (1993)
MACBETH	Bana e Costa and Vansnick (1994)
ANP	Saaty (2001)

Εφαρμογή

- 8 κριτήρια
- 12 εναλλακτικές
- Γραμμικά utilities

Εφαρμογή

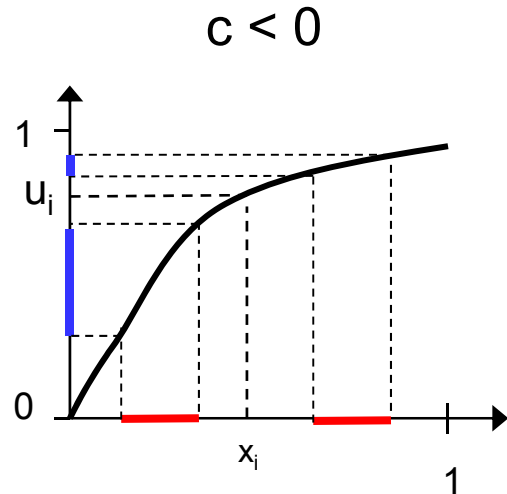
	Criterion 1	Criterion 2	Criterion 3	Criterion 4	Criterion 5	Criterion 6	Criterion 7	Criterion 8
Weights	30.0%	6.5%	12.5%	8.0%	7.0%	12.5%	10.0%	13.5%
Alternative 1	0.79	657	0.47	0.77	218	0.21	1	0.20
Alternative 2	0.56	859	0.48	0.32	165	0.47	1	0.59
Alternative 3	0.77	776	0.34	0.83	13	0.70	0	0.51
Alternative 4	0.40	862	0.84	0.29	150	0.80	1	0.76
Alternative 5	0.99	803	0.96	0.87	66	0.34	1	0.29
Alternative 6	0.65	612	0.83	0.52	137	0.19	1	0.88
Alternative 7	0.10	685	0.44	0.63	220	0.58	0	0.78
Alternative 8	0.04	439	0.97	0.64	71	0.86	0	0.60
Alternative 9	0.29	789	0.73	0.90	64	0.88	1	0.49
Alternative 10	0.34	817	0.93	0.44	206	0.34	0	0.66
Alternative 11	1.00	614	0.09	0.88	141	0.16	0	0.79
Alternative 12	0.19	818	0.67	0.50	267	0.76	1	0.58

Εφαρμογή

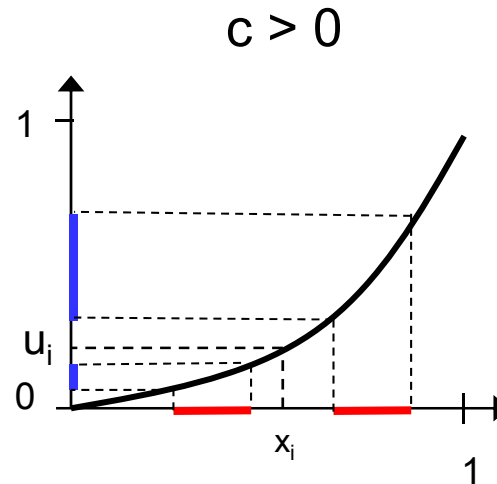
Μεγιστοποίηση: $x_i = \frac{\text{value-min}}{\text{max-min}}$

Ελαχιστοποίηση: $x_i = \frac{\text{max-value}}{\text{max-min}}$

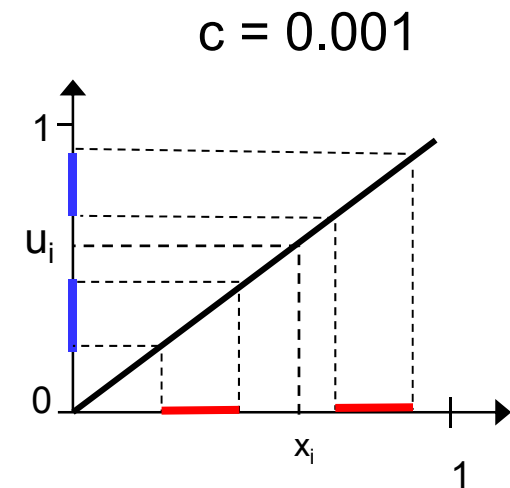
$$u_i = \frac{1 - e^{cx_i}}{1 - e^c}$$



Αμυντική στάση
Κοίλη χρησιμότητα
(concave utility)



Επιθετική στάση
Κυρτή χρησιμότητα
(convex utility)



Ουδέτερη στάση
Γραμμική χρησιμότητα
(linear utility)

Εφαρμογή

- Η **κοίλη** καμπύλη αποδίδει αναλογικά υψηλότερες τιμές χρησιμότητας u_i σε μία χαμηλή επίδοση και εκφράζει αποστροφή στον κίνδυνο και συντηρητική συμπεριφορά.
- Η **κυρτή** καμπύλη αποδίδει αναλογικά υψηλότερες τιμές χρησιμότητας u_i σε μία υψηλή επίδοση και εκφράζει ροπή προς τον κίνδυνο και ρισοκίνδυνη συμπεριφορά.
- Η **ευθεία** γραμμή αποδίδει τιμές χρησιμότητας u_i σε πλήρη αναλογία με τις τιμές των επιδόσεων και εκφράζει ουδετερότητα απέναντι στον κίνδυνο.

Τέλος ενότητας