

# Άσκηση 16

Η δραστηριότητα ενός συνεταιρισμού παρασκευής κρασιού μιας πόλης, περιλαμβάνει την παραλαβή σταφυλιών και τη ζύμωση του μούστου, με σκοπό τη δημιουργία κρασιού. Η ζύμωση πραγματοποιείται σε δύο οινοποιεία που βρίσκονται, το ένα παραλιακά στην πόλη και το άλλο στο κέντρο της. Η ελάχιστη εβδομαδιαία ζήτηση κρασιού στην πόλη ανέρχεται στους 250 τόνους. Σαν σύμβουλος του συνεταιρισμού καλείστε να καθορίσετε τα βέλτιστα επίπεδα δραστηριότητας των δύο οινοποιείων του. Τα τεchnοοικονομικά δεδομένα του προβλήματος συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 100 κιλά σταφύλια αντιστοιχούν σε 60 κιλά κρασί.
- Το κόστος ζύμωσης συμπεριλαμβάνει την απασχόληση του εργατικού δυναμικού.
- Περιορισμοί που οφείλονται στα μεταφορικά μέσα, δεν επιτρέπουν τη μεταφορά περισσότερων από 550 τόνους σταφυλιών προς τα δύο οινοποιεία εβδομαδιαίως.
- Σε εβδομαδιαία βάση διατίθενται 55 ώρες εργασίας που κατανέμονται ελεύθερα στα δύο οινοποιεία.

Οινοποιείο	Κόστος μεταφοράς ανά τόνο σταφυλιών	Κόστος ζύμωσης ανά τόνο σταφυλιών	Απαιτούμενη εργασία ανά τόνο σταφυλιών	Εβδομαδιαία μέγιστη δυνατότητα ζύμωσης
Παραλιακό	15 €	45 €	0,10 ώρες	250 τόνοι
Κεντρικό	20 €	30 €	0,15 ώρες	450 τόνοι



# Άσκηση 16

1. Να διατυπωθούν και επιλυθούν τα μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού που εντοπίζουν:
  - a) την εβδομαδιαία παραγωγή κρασιού που ελαχιστοποιεί το κόστος του συνεταιρισμού.
  - b) τη μέγιστη δυνατή εβδομαδιαία παραγωγή των οινοποιείων.
2. Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του κόστους, (a), να δοθεί η ερμηνεία κάθε μιας δυαδικής μεταβλητής και να προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση του.
3. Προσδιορίστε για ποια τιμή κόστους ζύμωσης στο κεντρικό οινοποιείο, θα έχουμε απειρία λύσεων στο πρωτεύον πρόβλημα (a) αν όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμείνουν σταθερές.
4. Να επιλυθεί το πρόβλημα (b) με την μέθοδο SIMPLEX.



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 1

### ➤ Μεταβλητές Απόφασης

Έστω:

$x_1$  : Ποσότητα σταφυλιών για ζύμωση στο παραλιακό οινοποιείο (tn/ εβδ.)

$x_2$  : Ποσότητα σταφυλιών για ζύμωση στο κεντρικό οινοποιείο (tn/ εβδ.)

### ➤ Περιορισμοί

100 κιλά σταφυλιών  
= 60 κιλά κρασί

- Ελάχιστη εβδομαδ. ζήτηση κρασιού:  $0,6x_1 + 0,6x_2 \geq 250$  (I)
  - Χωρητικότητα λόγω Μεταφορικών:  $x_1 + x_2 \leq 550$  (II)
  - Εργατικό δυναμικό:  $0,10x_1 + 0,15x_2 \leq 55$  (III)
  - Δυναμικότητα οινοποιείων:  $x_1 \leq 250$  (IV)  
 $x_2 \leq 450$  (V)
- \*  $x_1, x_2 \geq 0$

### ➤ Αντικειμενικές Συναρτήσεις

Κόστος μεταφοράς  
και κόστος ζύμωσης  
(15+45=60)  
(20+30=50)

❖ Εβδομαδιαία παραγωγή που ελαχιστοποιεί το κόστος:

$$\min[z_a] = 60x_1 + 50x_2 \text{ (€/εβδ.)}$$

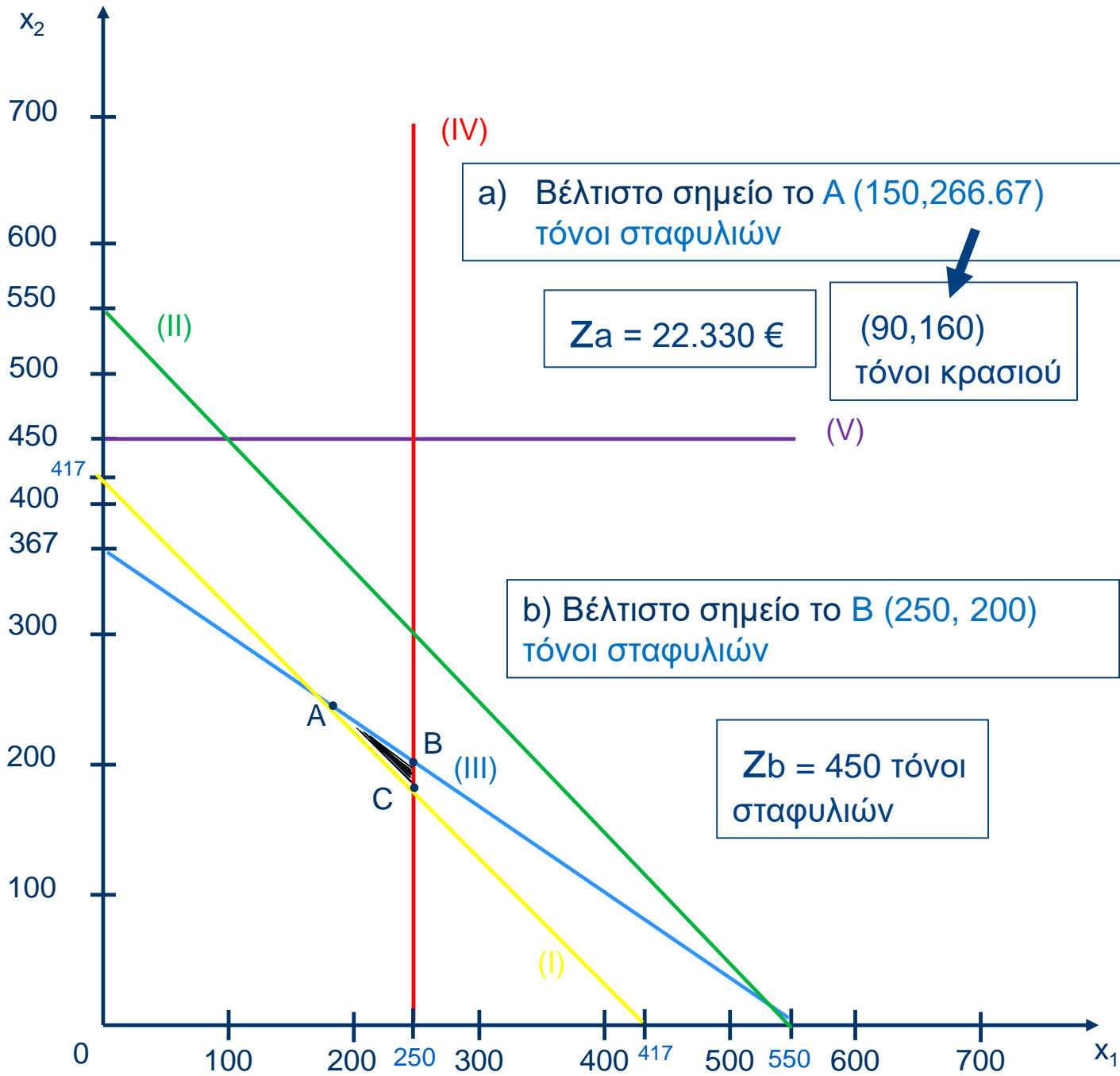
❖ Μέγιστη δυνατή εβδομαδιαία παραγωγή οινοποιείων:

$$\max[z_b] = x_1 + x_2 \text{ (tn/εβδ.)}$$



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 1



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 2

### ➤ Περιορισμοί

- $0,6x_1 + 0,6x_2 \geq 250$   $\Pi_1$ : Ορ. αξία για αύξηση ζήτησης 1 tn κρασί
- $x_1 + x_2 \leq 550$   $\Pi_2$ : Ορ. αξία της μεταφορικής δυναμικότητας
- $0,10x_1 + 0,15x_2 \leq 55$   $\Pi_3$ : Ορ. αξία της επιπλέον ώρας εργασίας
- $x_1 \leq 250$   $\Pi_4$ : Ορ. αξία της δυναμικότητας
- $x_2 \leq 450$   $\Pi_5$ : Ορ. αξία της δυναμικότητας

$$\min[z] = 60x_1 + 50x_2 \text{ (€/εβδ.)}$$

### ➤ Μετατροπή στο Δυαδικό

- $0,6x_1 + 0,6x_2 \geq 250$
  - $-x_1 - x_2 \geq -550$
  - $-0,10x_1 - 0,15x_2 \geq -55$
  - $-x_1 \geq -250$
  - $-x_2 \geq -450$
- $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5 \geq 0$
- $0,6\Pi_1 - \Pi_2 - 0,1\Pi_3 - \Pi_4 \leq 60$
- $0,6\Pi_1 - \Pi_2 - 0,15\Pi_3 - \Pi_5 \leq 50$
- $\max[u] = 250\Pi_1 - 550\Pi_2 - 55\Pi_3 - 250\Pi_4 - 450\Pi_5$

$$\Pi_1 = 133,33$$

$$\Pi_3 = 200$$

$$\Pi_2, \Pi_4 = 0$$

$$u = 22.330 \text{ €}$$



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 3

### ➤ Κόστος ζύμωσης στο κεντρικό οινοποιείο C

Έστω: C το κόστος ζύμωσης στο κεντρικό οινοποιείο

$C^I$  το συνολικό κόστος παραγωγής του κεντρικού οινοποιείου

Τότε η αντικειμενική συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\min[z'] = 60x_1 + (20 + C) x_2 = 60x_1 + C^I * x_2$$

$$\text{Άρα } \lambda_{z'} = -60 / C^I \text{ (I)}$$

Για να έχω απειρία λύσεων, πρέπει

$$\lambda_{z'} = \lambda_1^* \Rightarrow -60 / C^I = -1$$

$$\text{Άρα } C^I = 60 \text{ και από (I): } C = 40 \text{ €}$$

Η κλίση της ευθείας του 1<sup>ου</sup> περιορισμού



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 4

Μετατρέπουμε το γραμμικό πρόβλημα στην πρότυπη μορφή του με εισαγωγή μεταβλητής απόκλισης

$$\max[z] = x_1 + x_2 + 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + 0 \cdot S_3 + 0 \cdot S_4 + 0 \cdot S_5 - M \cdot A_1$$

$$0,6x_1 + 0,6x_2 - S_1 + A_1 = 250$$

$$x_1 + x_2 + S_2 = 550$$

$$0,10x_1 + 0,15x_2 + S_3 = 55$$

$$x_1 + S_4 = 250$$

$$x_2 + S_5 = 450$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, A_1, M \geq 0$$

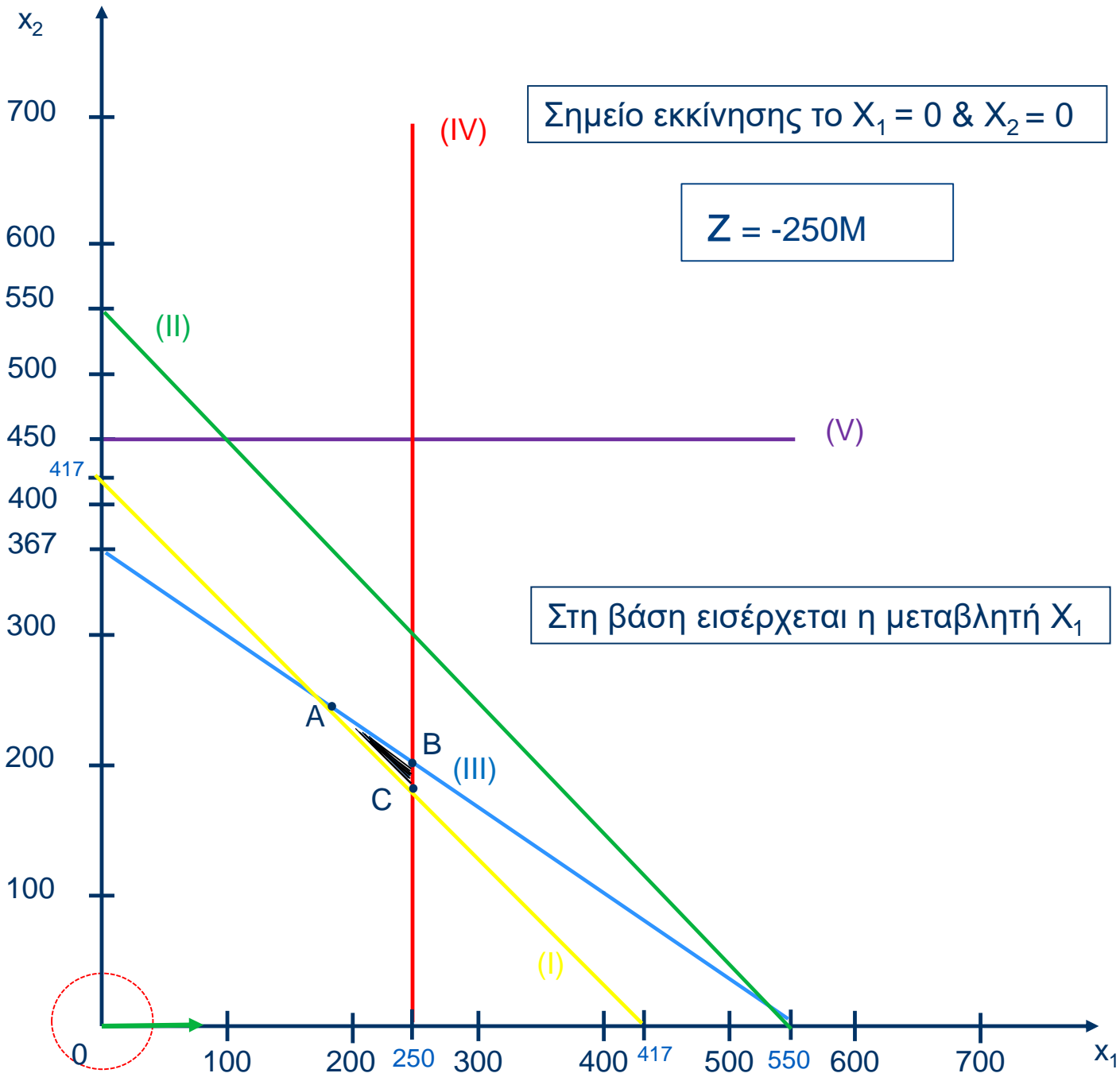
Βάση	$x_1$	$x_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$A_1$	Δεξί Μέρος
$A_1$	0,6	0,6	-1	0	0	0	0	1	250
$S_2$	1	1	0	1	0	0	0	0	550
$S_3$	0,10	0,15	0	0	1	0	0	0	55
$S_4$	1	0	0	0	0	1	0	0	250
$S_5$	0	1	0	0	0	0	1	0	450
$C_j$	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\vec{C}_j$	$1+0,6M$	$1+0,6M$	-M	0	0	0	0	0	$Z = -250M$

Ο μικρότερος θετικός λόγος, δηλαδή η  $S_4$  ( $250/1 = 250$ )  
Καθορίζει ποια μεταβλητή θα εξέλθει από τη βάση



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 4





# Άσκηση 16

## Ερώτημα 4

Βάση	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$A_1$	Δεξί Μέρος
$A_1$	0	0,6	-1	0	0	-0,6	0	1	100
$S_2$	0	1	0	1	0	-1	0	0	300
$S_3$	0	0,15	0	0	1	-0,1	0	0	30
$X_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	250
$S_5$	0	1	0	0	0	0	1	0	450
$C_j$	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\vec{C}_j$	0	$1+0,6M$	-M	0	0	$1-0,6M$	0	0	$Z=$ $250-100M$

$$\begin{aligned}\vec{C}_{S_4} &= C_{S_4} - Z_{S_4} \\ &= 0 - [1 \cdot 1 - 0,6 \cdot (-M)] \\ &= 1 - 0,6M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z &= C_j \times X_B \\ &= 1 \cdot 250 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 450 - M \cdot 100 \\ &= 250 - 100M\end{aligned}$$



# Άσκηση 16

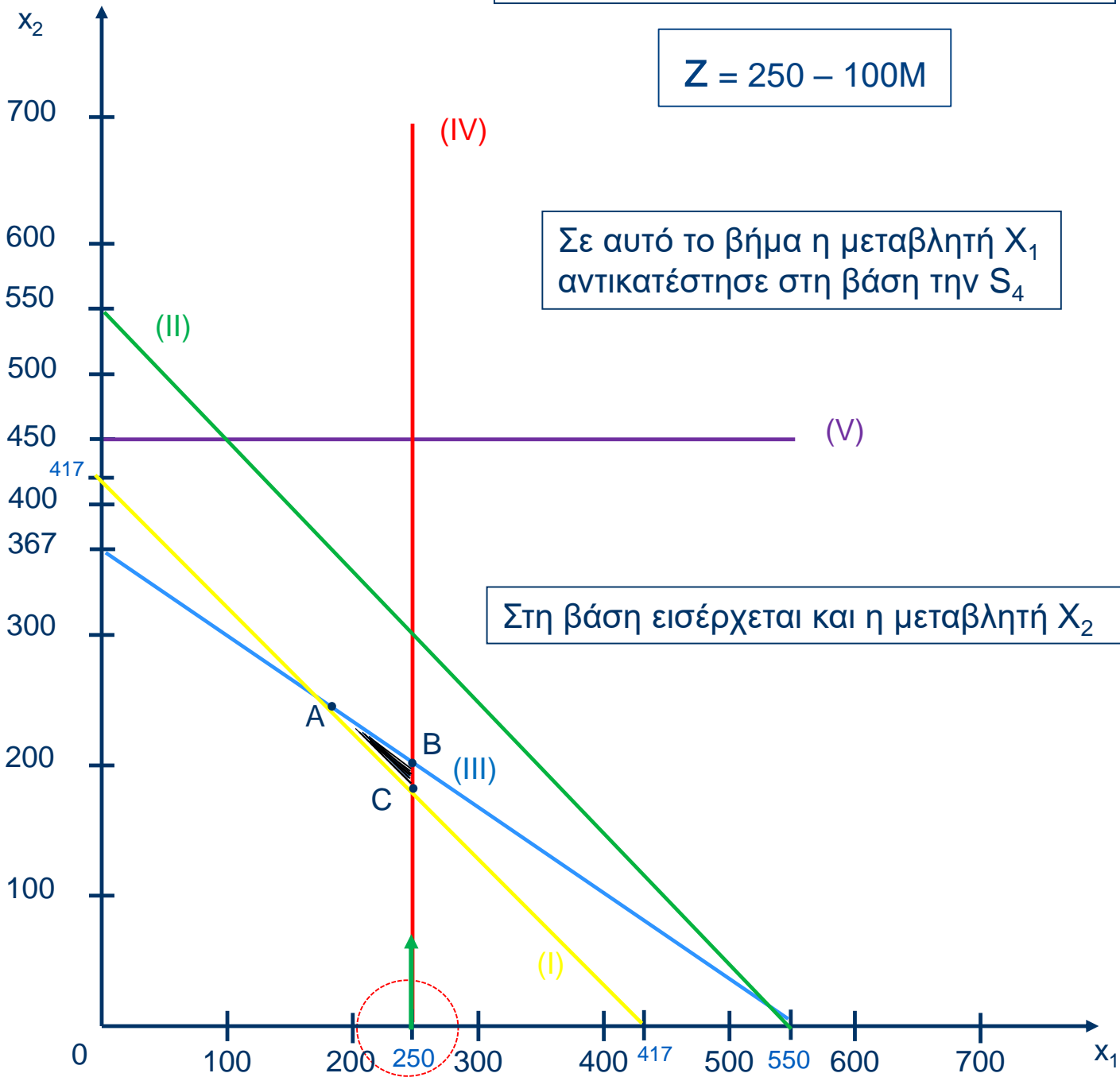
## Ερώτημα 4

Σημείο βήματος 1 το  $X_1 = 250$  &  $X_2 = 0$

$$Z = 250 - 100M$$

Σε αυτό το βήμα η μεταβλητή  $X_1$  αντικατέστησε στη βάση την  $S_4$

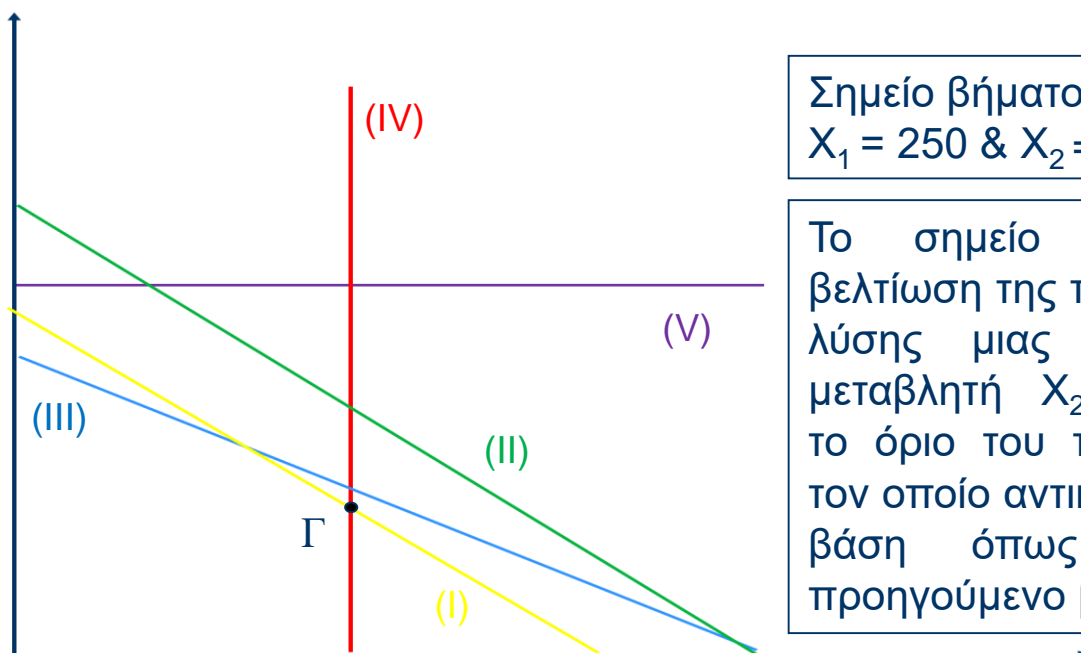
Στη βάση εισέρχεται και η μεταβλητή  $X_2$



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 4

Βάση	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$A_1$	Δεξί Μέρος
$X_2$	0	1	-1.66	0	0	-1	0	-1.66	166.66
$S_2$	0	0	1.66	1	0	0	0	1.66	133.33
$S_3$	0	0	0.25	0	1	0.05	0	-0.25	5
$X_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	250
$S_5$	0	0	1.66	0	0	1	1	-1.66	283.33
$C_j$	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\vec{C}_j$	0	0	1.66	0	0	0	0	-2.66M	Z= 416.66



Σημείο βήματος 2 το Γ  
 $X_1 = 250$  &  $X_2 = 166,66$

Το σημείο Γ αποτελεί βελτίωση της προηγούμενης λύσης μιας και για τη μεταβλητή  $X_2$  εξαντλήθηκε το όριο του περιορισμού I τον οποίο αντικατέστησε στη βάση όπως όρισε το προηγούμενο βήμα



# Άσκηση 16

## Ερώτημα 4

Βάση	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$A_1$	Δεξί Μέρος
$X_2$	0	1	0	0	6.66	-0.66	0	-3.33	200
$S_2$	0	0	0	1	-6.66	-0.33	0	0	100
$S_1$	0	0	1	0	4	0.2	0	-1	20
$X_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	250
$S_5$	0	0	0	0	-6.66	0.66	1	0	250
$C_j$	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\vec{C}_j$	0	0	0	0	-6.66	-0.33	0	-M + 3.33	Z = 450

Δεν υπάρχει άλλο θετικό Ο.Κ.Ε. επομένως δεν υπάρχουν περιθώρια περαιτέρω βελτίωσης της λύσης.

Βέλτιστο σημείο το B (250, 200) τόνοι σταφυλιών όπως και στην γραφική επίλυση



# Άσκηση 17

Η εταιρεία Karra διαθέτει δύο εργοστάσια, το εργοστάσιο A και το εργοστάσιο B, τα οποία παράγουν τα ίδια προϊόντα, το προϊόν 1 και το προϊόν 2. Καθένα από αυτά απασχολεί 150 εργάτες που καθένας τους εργάζεται 140 ώρες το μήνα. Τα δεδομένα παραγωγής των δύο εργοστασίων συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Κόστος παραγωγής προϊόντος 1 (ανά ώρα)	Κόστος παραγωγής προϊόντος 2 (ανά ώρα)	Παραγωγικότητα προϊόντος 1 (ανά ώρα εργασίας)	Παραγωγικότητα προϊόντος 2 (ανά ώρα εργασίας)
Εργοστάσιο A	5 €	3 €	1	4
Εργοστάσιο B	3,5 €	2 €	1	1

Όμως, πτώση στις πωλήσεις το τελευταίο χρονικό διάστημα οδηγεί την εταιρεία στην υπογραφή σύμβασης με έναν ιδιώτη αγοραστή. Σύμφωνα με αυτή τη σύμβαση όλη η παραγωγή της νέας εταιρείας θα απορροφάται αποκλειστικά από το συγκεκριμένο αγοραστή, οι παραγγελίες του οποίου ανέρχονται σε 30.000 κομμάτια προϊόντος 1 και 15.000 κομμάτια προϊόντος 2 σε μηνιαία βάση. Επιβάλλεται, λοιπόν, η παραγωγή της Karra να ισούται ακριβώς με τη ζήτηση αυτή.



# Άσκηση 17

- 1α. Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα κατανομής της παραγωγής της εταιρείας Karra με κατάλληλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού (ΓΠ), ελαχιστοποιώντας το κόστος.
- 1β. Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις ισότητας συγκεκριμένων περιορισμών, προτείνετε ένα ισοδύναμο μοντέλο ΓΠ δύο μεταβλητών απόφασης, και επιλύστε το χρησιμοποιώντας τη γραφική μέθοδο. Ποιος είναι ο βέλτιστος μηνιαίος καταμερισμός παραγωγής στα δύο εργοστάσια και ποιες οι επιπτώσεις της λύσης αυτής στο εργατικό δυναμικό τους;
2. Διατυπώστε το δυαδικό πρόβλημα του ΓΠ και δώστε την οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.
3. Επιλύστε το πρόβλημα 1β) με τη μέθοδο SIMPLEX.
4. Αν η λύση του ερωτήματος 1β) κριθεί ως ακατάλληλη από το Υπουργείο Εργασίας λόγω της απόλυσης υπεράριθμου προσωπικού, και η διεύθυνση δεχτεί να αυξήσει το κόστος παραγωγής μέχρι 10%, προτείνετε ένα νέο μοντέλο ΓΠ, επέκταση του υφιστάμενου, με στόχο την ελαχιστοποίηση της ανεργίας.



# Άσκηση 18

Μια εταιρεία ηλεκτρονικών διαθέτει μια γραμμή παραγωγής στην οποία παράγει τα προϊόντα ΗΛ1 και ΗΛ2. Κάθε μέρα η γραμμή παραγωγής της εταιρείας αφιερώνεται αποκλειστικά στην παραγωγή ενός από τα δύο προϊόντα ΗΛ1 και ΗΛ2 με ημερήσια δυναμικότητα 150 και 250 τεμάχια αντίστοιχα.

Το τμήμα εμπορίας της εταιρείας εκτιμά ότι η ζήτηση ΗΛ1 για το επόμενο τρίμηνο είναι τουλάχιστον 2.000 τεμάχια, ενώ η ζήτηση ΗΛ2 το πολύ 7.000 τεμάχια. Για την παραγωγή των προϊόντων ΗΛ1 και ΗΛ2 που θα πουληθούν στο επόμενο τρίμηνο υπάρχουν διαθέσιμες 60 μέρες της γραμμής παραγωγής.

Το κόστος παραγωγής ενός τεμαχίου ΗΛ1 είναι 9 Ευρώ, ενώ το κόστος παραγωγής ενός τεμαχίου ΗΛ2 είναι 14 Ευρώ. Η τιμή πώλησης ενός τεμαχίου ΗΛ1 είναι 12 Ευρώ, ενώ η τιμή πώλησης ενός τεμαχίου ΗΛ2 είναι 18 Ευρώ.

Στον τριμηνιαίο προϋπολογισμό της εταιρείας το διαθέσιμο ποσό για την παραγωγή των προϊόντων ΗΛ1 και ΗΛ2 δεν μπορεί να υπερβεί τα 126.000 Ευρώ.



# Άσκηση 18

1. Να διατυπωθεί και επιλυθεί το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού της εταιρείας που εντοπίζει την βέλτιστη τριμηνιαία παραγωγή των προϊόντων ΗΛ1 και ΗΛ2.
2. Να βρεθούν τα όρια μεταβολής της τιμής πώλησης ενός τεμαχίου ΗΛ1 έτσι ώστε να μην μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση του προηγούμενου Ερωτήματος.
3. Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα, να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση του και να δοθεί η οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

