



## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

# ΜΕΘΟΔΟΣ VIKOR - ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

*Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ*

Γιώργος Τραχανάς, Χάρης Δούκας, Ιωάννης Ψαρράς

# ΜΕΡΟΣ Α΄

## ***Αβεβαιότητα***

# ΑΔΥΝΑΜΙΕΣ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

- Κλασικές μέθοδοι ΠΑΑ: οι επιδόσεις και τα βάρη είναι προσδιορισμένα με ακρίβεια.
- Στον πραγματικό κόσμο επικρατεί η ανακρίβεια (imprecision) και η αβεβαιότητα (uncertainty).
- Η γνώση του αποφασίζοντα ή του εμπειρογνώμονα είναι ακριβής: μη ρεαλιστική υπόθεση.
- Π.χ. η κρίση μας ως προς τις προτιμήσεις είναι συχνά ασαφής. Ο άνθρωπος δεν μπορεί να αντιστοιχίσει συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στις προτιμήσεις του.

# ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

- Πολύ συχνά, για να ληφθεί υπόψη αυτή η αβεβαιότητα, υιοθετούνται ασαφείς (fuzzy) ή στοχαστικές μέθοδοι.
- Ασαφής προσέγγιση: θεωρούνται γνωστές οι συναρτήσεις συμμετοχής (membership functions) για διάφορες παραμέτρους του προβλήματος απόφασης.
- Στοχαστική προσέγγιση: θεωρούνται γνωστές οι κατανομές πιθανότητας για διάφορες παραμέτρους του προβλήματος απόφασης.

# ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Ωστόσο, στην πραγματικότητα, δεν είναι πάντα εύκολο να προσδιοριστεί μια συνάρτηση συμμετοχής ή μια κατανομή πιθανότητας.
- Σε ορισμένες περιπτώσεις, η χρήση αριθμών-διαστημάτων (interval numbers) φαίνεται δικαιολογημένη.
- Είναι ο απλούστερος τρόπος για να εκφράσουμε την αβεβαιότητα.
- Επέκταση της έννοιας του πραγματικού αριθμού.
- Σύγκριση τέτοιων αριθμών: μαθηματικά εργαλεία.

# ΑΡΙΘΜΟΙ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

- Απαιτείται ελάχιστη «ποσότητα» πληροφορίας σχετικά με τις άλλες προσεγγίσεις.
- Καμία υπόθεση για πιθανότητες.
- Οι αβέβαιες παράμετροι του πίνακα απόφασης μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή μέσα στο διάστημα που ορίζονται.
- Ένα αριθμός-διάστημα εκφράζει το εύρος ανεκτικότητας για μια παράμετρο.

# ΔΟΜΗ

- Σύνολο εναλλακτικών:

$$A = \{A_1, \dots, A_m\}$$

- Σύνολο κριτηρίων:

$$C = \{C_1, \dots, C_n\}$$

- Επιδόσεις:

$$f_{ij} \in [f_{ij}^L, f_{ij}^U], \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

- Βάρη:

$$W = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

# ΔΟΜΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

## Πίνακας Απόφασης

	$C_1$	$C_2$	...	$C_n$
$A_1$	$[f_{11}^L, f_{11}^U]$	$[f_{12}^L, f_{12}^U]$	...	$[f_{1n}^L, f_{1n}^U]$
$A_2$	$[f_{21}^L, f_{21}^U]$	$[f_{22}^L, f_{22}^U]$	...	$[f_{2n}^L, f_{2n}^U]$
...	...	...	...	...
$A_m$	$[f_{m1}^L, f_{m1}^U]$	$[f_{m2}^L, f_{m2}^U]$	...	$[f_{mn}^L, f_{mn}^U]$



# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Προσδιορίζουμε τη θετική ιδεατή λύση και την αρνητική ιδεατή λύση, δηλ.

$$\begin{aligned} A^* &= \{f_1^*, \dots, f_n^*\} \\ &= \left\{ \left( \max_i f_{ij}^U : j \in I \right) \quad \text{ή} \quad \left( \min_i f_{ij}^L : j \in J \right) \right\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} A^- &= \{f_1^-, \dots, f_n^-\} \\ &= \left\{ \left( \min_i f_{ij}^L : j \in I \right) \quad \text{ή} \quad \left( \max_i f_{ij}^U : j \in J \right) \right\} \end{aligned}$$

όπου  $I$  είναι τα κριτήρια οφέλους και  $J$  είναι τα κριτήρια κόστους.

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

2. Για κάθε εναλλακτική, προσδιορίζουμε το διάστημα

$$S_i = [S_i^L, S_i^U]$$

ως εξής:

$$S_i^L = \sum_{j \in I} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}^U}{f_j^* - f_j^-} + \sum_{j \in J} w_j \frac{f_{ij}^L - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}, \quad i = 1, \dots, m$$

και

$$S_i^U = \sum_{j \in I} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}^L}{f_j^* - f_j^-} + \sum_{j \in J} w_j \frac{f_{ij}^U - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}, \quad i = 1, \dots, m$$

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

3. Η εναλλακτική με το μικρότερο  $S$  είναι η ζητούμενη λύση.

- Όμως τα  $S_i$  είναι διαστήματα!
- Μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα συγκρίνουμε;

# ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

- Δίνονται δύο αριθμοί-διαστήματα (interval numbers):

$$a = [a^L, a^U], \quad b = [b^L, b^U]$$

- Ποιος είναι μικρότερος;

# ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

➤ Έστω  $0 < K \leq 1$ .

## Περιπτώσεις

- Αν δεν τέμνονται, τότε είναι αυτός με τις μικρότερες τιμές. Δηλ. αν  $a^U \leq b^L$ , τότε επιλέγεται ο  $a$  ως μικρότερος.
- Αν οι δύο αριθμοί-διαστήματα ταυτίζονται, τότε έχουν την ίδια προτεραιότητα.
- Αν  $a^L \leq b^L < b^U \leq a^U$ , τότε εργαζόμαστε ως εξής: αν ισχύει
$$K(b^L - a^L) \geq (1 - K)(a^U - b^U)$$
τότε ο  $a$  είναι ο μικρότερος. Αλλιώς, είναι ο  $b$ .
- Αν  $a^L < b^L < a^U < b^U$ , τότε εργαζόμαστε ως εξής: αν ισχύει
$$K(b^L - a^L) \geq (1 - K)(b^U - a^U)$$
τότε ο  $a$  είναι ο μικρότερος. Αλλιώς, είναι ο  $b$ .

# ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Ο αριθμός  $K$  εκφράζει το επίπεδο αισιοδοξίας του αποφασίζοντα.
- Συνήθως  $K = 0.5$  (ορθολογικός αποφασίζων).



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Θετική και αρνητική ιδεατή λύση

	$C_1$	$C_2$
$f_j^*$	0.75	4681
$f_j^-$	5.37	2784



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

## Αριθμοί $S$

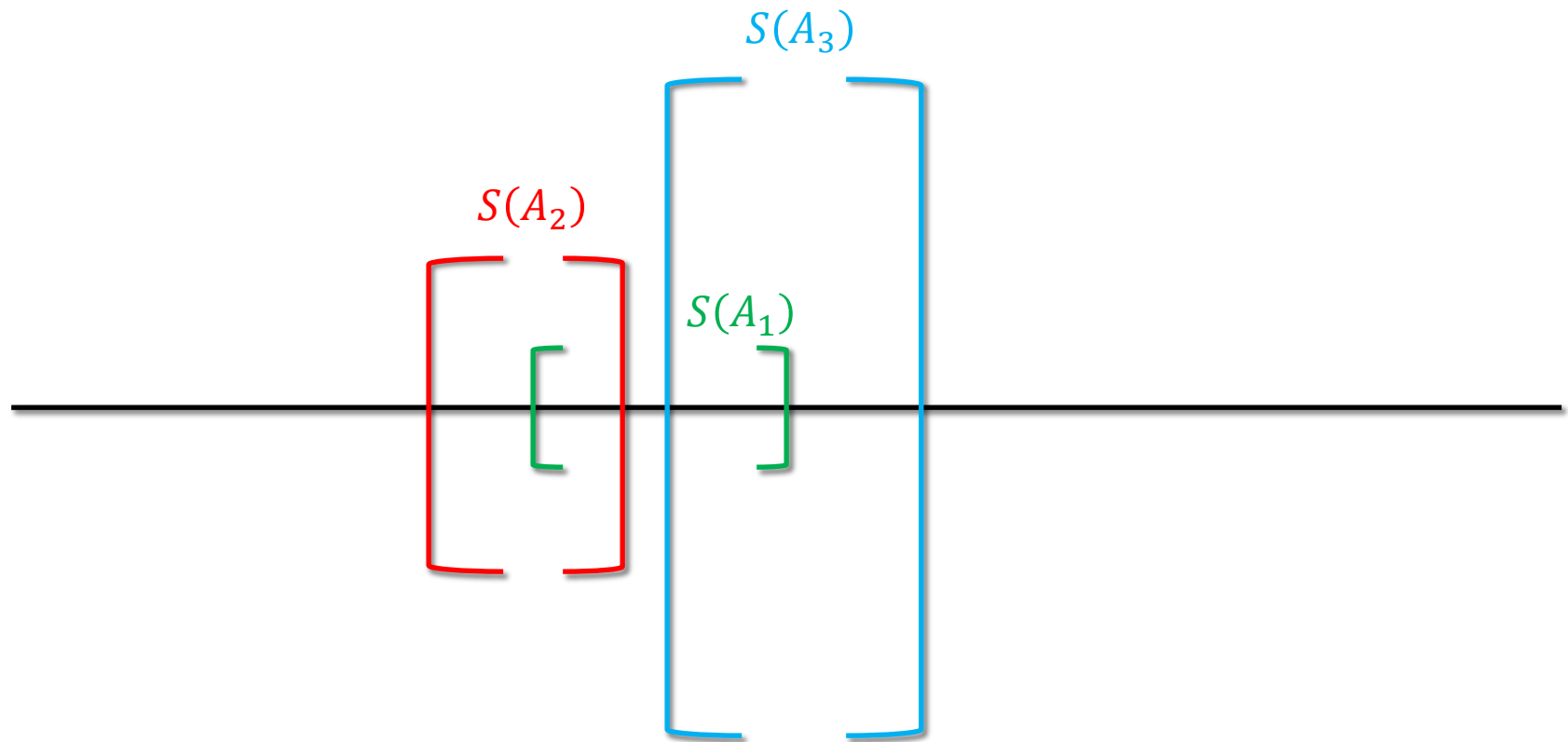
	$[s_i^L, s_i^U]$
$A_1$	[0.3925, 0.5530]
$A_2$	[0.3341, 0.4134]
$A_3$	[0.4491, 0.5717]

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Π.χ.

$$\begin{aligned} S_2^L &= w_2 \frac{f_2^* - f_{22}^U}{f_2^* - f_2^-} + w_1 \frac{f_{21}^L - f_1^*}{f_1^- - f_1^*} \\ &= (0.5) \frac{4681 - 3857}{4681 - 2784} + (0.5) \frac{1.83 - 0.75}{5.37 - 0.75} = 0.3341 \end{aligned}$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Παρατηρούμε ότι

$$S(A_2) < S(A_3)$$

Ελέγχουμε  $S(A_1)$  και  $S(A_2)$ :

$$(0.6)(0.3925 - 0.3341) \geq (0.4)(0.5530 - 0.4134) ?$$

Δεν ισχύει. Άρα

$$S(A_1) < S(A_2)$$

➤ Λύση:  $A_1$

# ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΣ...

- Ο προσδιορισμός τιμών με ακρίβεια για τα διάφορα χαρακτηριστικά - κριτήρια είναι δύσκολος, αν όχι αδύνατος.
- Επομένως, συνιστάται η χρήση αριθμών-διαστημάτων.
- Επεκτείναμε τη μέθοδο VIKOR ώστε να συμπεριλάβει τέτοιους «αριθμούς» στο πρόβλημα απόφασης.
- Υπολογίσαμε τα  $S$  ως διαστήματα.
- Καταλήξαμε σε μια λύση βασιζόμενοι στην έννοια της εγγύτητας από τη θετική ιδεατή λύση.
- Χρειάστηκε να συγκρίνουμε διαστήματα.
- ❖ Η τελική κατάταξη εξαρτάται από το επίπεδο αισιοδοξίας του αποφασίζοντα.
- ❖ Προφανώς, με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να αξιοποιήσουμε και τα μέτρα  $R$  και  $Q$ .

# ΜΕΡΟΣ Β΄

## ***Βάρη με ελλιπή πληροφόρηση***

# ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ

- Τα βάρη των κριτηρίων έχουν καθοριστικό ρόλο στον προσδιορισμό της τελικής απόφασης.
  
- Οι μέθοδοι στάθμισης (weighting methods) ποικίλουν:
  - Equal weights
  - Direct weighting method
  - Entropy method
  - AHP (Analytic Hierarchy Process)
  - Fuzzy method
  - ...

# ΕΛΛΙΠΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗ

- Μη ακριβή βάρη:
  - Έλλειψη χρόνου.
  - Ο αποφασίζων δεν επιθυμεί να εκφραστεί με ακρίβεια.
  - Ο αποφασίζων έχει στη διάθεσή του ελλιπή πληροφορία.
  - Μη ρεαλιστική θεώρηση.
  
- Εμείς θα δούμε τη μέθοδο *VIKOR* για βάρη με ελλιπή πληροφόρηση (incomplete information criteria weights).



# ΜΟΡΦΕΣ ΒΑΡΩΝ ΜΕ ΕΛΛΙΠΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗ

1. Lower bounds (LB):

$$W_{LB} = \{ \mathbf{w}: w_j \geq a_j > 0 \}$$

2. Weak inequalities (WI):

$$W_{WI} = \{ \mathbf{w}: w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0 \}$$

3. Ratio scale inequalities (RI):

$$W_{RI} = \{ \mathbf{w}: w_1 \geq a_1 w_2, \dots, w_{n-1} \geq a_{n-1} w_n, \quad a_j > 0 \}$$

4. ...

➤ Πλεονεκτήματα:

- Παρέχουν ελευθερία στον αποφασίζοντα.
- Μειώνουν τον φόρτο συλλογής δεδομένων.

✓ Θα δούμε την περίπτωση 2 (**WI**) που είναι η πλέον διαδεδομένη.

# VIKOR: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΒΑΡΗ

## Κατηγορίες VIKOR

Επιδόσεις	Βάρη κριτηρίων	
	Ακριβή	Ελλιπή
Ακριβείς	ΝΑΙ (✓)	ΝΑΙ (✓)
Διαστήματα	ΝΑΙ (✓)	ΝΑΙ (Kim & Ahn,2019)

- Δύο μέθοδοι επίλυσης:
  - Γραμμικός προγραμματισμός.
  - Μέθοδος των ακραίων σημείων (extreme points). ✓

# ΑΚΡΑΙΑ ΣΗΜΕΙΑ

- Τα ελλιπή βάρη (WI) οδηγούν φυσιολογικά σε ένα σύνολο ακραίων σημείων.
- Ακραία σημεία στην περίπτωση  $n$  κριτηρίων:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ \lambda_2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) \\ &\quad \vdots \\ \lambda_{n-1} &= \left(\frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0\right) \\ \lambda_n &= \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Πίνακας ακραίων σημείων:

$$\mathbf{E} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/n \\ 0 & 1/2 & \dots & 1/n \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1/n \\ 0 & 0 & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

2. Συμβολίζουμε με  $I$  το σύνολο των κριτηρίων οφέλους και με  $J$  το σύνολο των κριτηρίων κόστους. Προφανώς  $|I| + |J| = n$ .

Για κάθε εναλλακτική, γράφουμε το διάνυσμα:

$$\mathbf{d}_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$$

όπου

$$d_{ij} = \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \quad \text{όταν } j \in I$$

και

$$d_{ij} = \frac{f_{ij} - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}, \quad \text{όταν } j \in J$$

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- **Προσοχή:** η σειρά με την οποία «μπαίνουν» οι συνιστώσες  $d_{ij}$  μέσα στο διάνυσμα  $\mathbf{d}_i$  εξαρτάται από τη σχετική σπουδαιότητα των κριτηρίων.

- Έχουμε υποθέσει ότι  $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$  και γι' αυτό τον λόγο έχουμε τη μορφή

$$\mathbf{d}_i = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$$

- Η διάταξη των συνιστωσών «ακολουθεί» τη διάταξη των βαρών.

- Αν όμως, π.χ. υποθέσουμε ότι έχουμε 7 κριτήρια με την ακόλουθη σχέση:

$$w_3 \geq w_1 \geq w_4 \geq w_2 \geq w_7 \geq w_5 \geq w_6$$

τότε, σε αυτή την περίπτωση, το  $\mathbf{d}_i$  θα έχει τη μορφή:

$$\mathbf{d}_i = (d_{i3}, d_{i1}, d_{i4}, d_{i2}, d_{i7}, d_{i5}, d_{i6})$$

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- **Ερμηνεία:** κάθε συνιστώσα του διανύσματος  $d_i$  εκφράζει την κανονικοποιημένη απόκλιση από την καλύτερη τιμή του κριτηρίου που αντιστοιχεί.

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

3. Υπολογισμός  $S$ : Για κάθε εναλλακτική  $A_i$  υπολογίζουμε το διάστημα

$$S_i = [S_i^L, S_i^U]$$

από τις σχέσεις

$$S_i^L = \min\{\mathbf{d}_i \mathbf{E}\}$$

και

$$S_i^U = \max\{\mathbf{d}_i \mathbf{E}\}$$



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πίνακας Απόφασης

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$A_1$	3200	450	17	30
$A_2$	2400	690	98	70
$A_3$	2500	440	200	25
$A_4$	2800	460	90	50
$A_5$	1200	160	5	20



$$w_3 \geq w_1 \geq w_4 \geq w_2$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$f_j^*$	3200	690	200	20
$f_j^-$	1200	160	5	70
$ f_j^* - f_j^- $	2000	530	195	50

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$\left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right| = d_{ij}$$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
	$d_{i1}$	$d_{i2}$	$d_{i3}$	$d_{i4}$
$A_1$	0.00	0.45	0.93	0.20
$A_2$	0.40	0.00	0.52	1.00
$A_3$	0.35	0.47	0.00	0.10
$A_4$	0.20	0.43	0.56	0.60
$A_5$	1.00	1.00	1.00	0.00

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Έχουμε:

$$w_3 \geq w_1 \geq w_4 \geq w_2$$

Επομένως:

$$d_i = (d_{i3}, d_{i1}, d_{i4}, d_{i2}), \quad i = 1, \dots, 5$$

δηλ.

$$d_1 = (0.93, 0.00, 0.20, 0.45)$$

$$d_2 = (0.52, 0.40, 1.00, 0.00)$$

$$d_3 = (0.00, 0.35, 0.10, 0.47)$$

$$d_4 = (0.56, 0.20, 0.60, 0.43)$$

$$d_5 = (1.00, 1.00, 0.00, 1.00)$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Μένει να υπολογίσουμε τα  $d_i E$ .

Π.χ.

$$\begin{aligned} d_1 E &= (0.93, 0.00, 0.20, 0.45) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \\ &= (0.93, 0.46, 0.37, 0.39) \end{aligned}$$

Επομένως

$$S_1^L = \min\{0.93, 0.46, 0.37, 0.39\} = 0.37$$

και

$$S_1^U = \max\{0.93, 0.46, 0.37, 0.39\} = 0.93$$

δηλ.

$$S_1 = [0.37, 0.93]$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

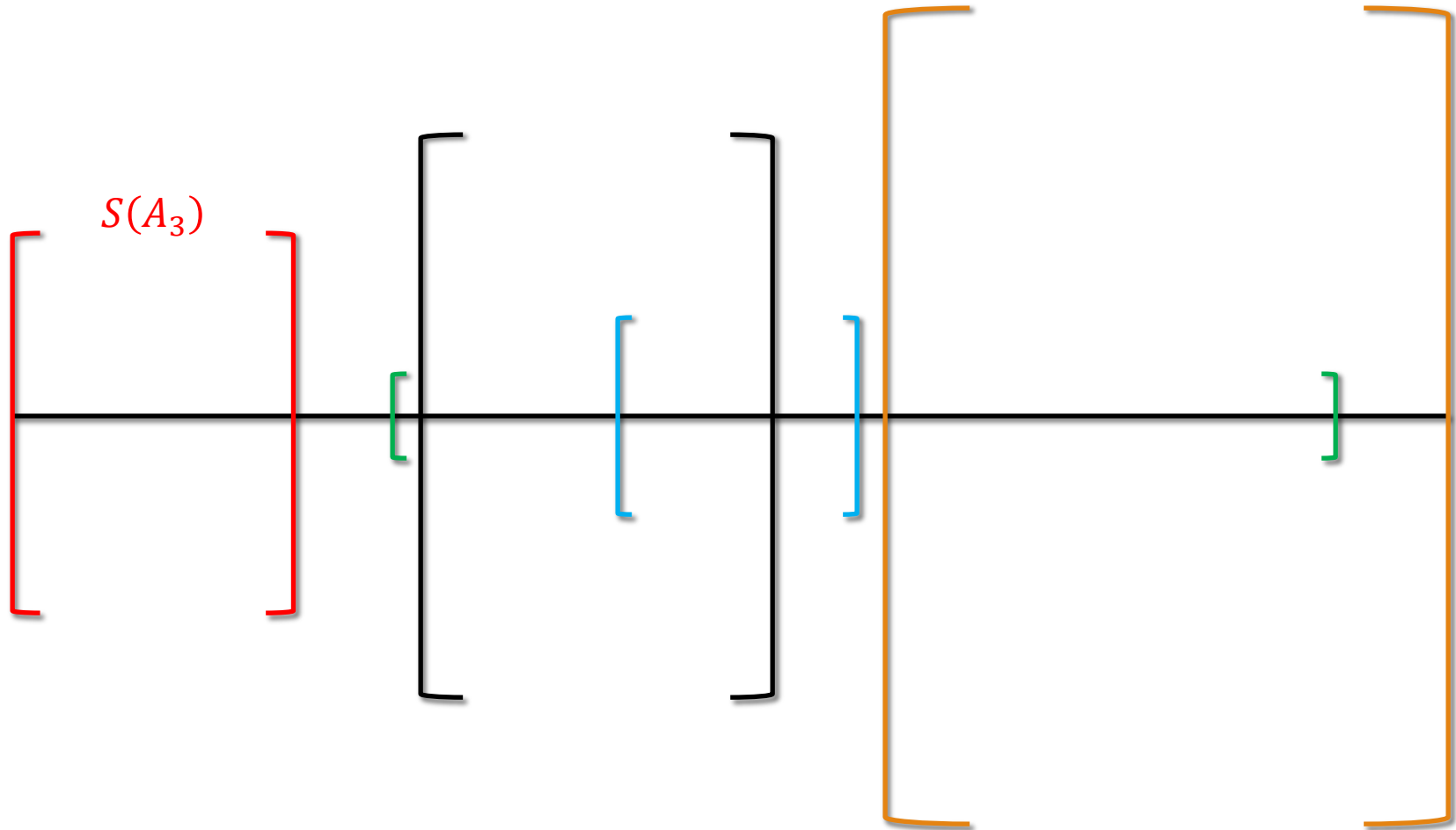
- Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα  $S_i$ .

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

	$S_i$
$A_1$	[0.37, 0.93]
$A_2$	[0.46, 0.64]
$A_3$	[0.00, 0.23]
$A_4$	[0.38, 0.56]
$A_5$	[0.66, 1.00]

➤ Σύγκριση αριθμών-διαστημάτων!

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)





# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Παρατηρούμε ότι ο αριθμός-διάστημα  $S(A_3)$  είναι ο μικρότερος.
- Επομένως, βάσει του μέτρου  $S$ , η ενδεικτική λύση είναι η εναλλακτική  $A_3$ .
- Προφανώς, μπορεί κάποιος να προχωρήσει περαιτέρω και να αξιοποιήσει μέτρα τύπου  $R$  και  $Q$ , στο πνεύμα της κλασικής προσέγγισης VIKOR (βλ. Kim & Ahn (2019)).

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Sayadi M.K., Heydari M., & Shahanaghi K. (2009), *Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers*, Applied Mathematical Modelling 33 (5), pp. 2257-2262.

Ahn B.S. (2015), *Extreme point-based multi-attribute decision analysis with incomplete information*, European Journal of Operational Research 240 (3), pp. 748-755.

Kim J.H. & Ahn B.S. (2019), *Extended VIKOR method using incomplete criteria weights*, Expert Systems with Applications 126 (15), pp. 124-132.

# ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Thank  
you!

Georgios Trachanas  
Email: [gtrachanas@epu.ntua.gr](mailto:gtrachanas@epu.ntua.gr)