



## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 8: Η ΜΕΘΟΔΟΣ VIKOR

*Πολυκριτηριακά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ*

Γιώργος Τραχανάς, Χάρης Δούκας, Ιωάννης Ψαρράς

# ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

---

- Πολύ συχνά, πολλά πρακτικά προβλήματα χαρακτηρίζονται από αντικρουόμενα (conflicting) και δυσανάλογα (non-commensurable) κριτήρια.
- Είναι πολύ πιθανό να μην υπάρχει λύση που να ικανοποιεί όλα τα κριτήρια ταυτόχρονα.
- Τα Πολυκριτηριακά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων (ΠΣΥΑ) παρέχουν μεθοδολογικά πλαίσια αξιολόγησης και επιλογής από ένα σύνολο εναλλακτικών υπό την παρουσία κριτηρίων.
- Λύσεις ή σύνολα λύσεων συμβιβασμού (compromise solution sets).

# ΜΕΘΟΔΟΣ VIKOR

---

- Η μέθοδος VIKOR μας προσφέρει μια κατάταξη (ranking) των εναλλακτικών για δοθέντα κριτήρια.
- Πολύ συχνά συγκρίνεται με τη γνωστή μέθοδο TOPSIS.
- Διαφορές VIKOR - TOPSIS:
  - Συνάρτηση συνάθροισης (aggregation function)
  - Μέθοδος κανονικοποίησης (normalization)
  - Στην TOPSIS, λαμβάνουμε υπόψη τόσο την απόσταση από τη θετική ιδεατή λύση, όσο και από την αντίστοιχη αρνητική ιδεατή λύση.
    - Ταιριάζει σε επιφυλακτικούς αποφασίζοντες.
  - Στη VIKOR, λαμβάνουμε υπόψη μόνο τη θετική ιδεατή λύση.
    - Ταιριάζει σε πιο ριψοκίνδυνους αποφασίζοντες.

# ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ VIKOR

---

- Εύκολα προγραμματιζόμενη υπολογιστική διαδικασία.
- Ενσωματώνει ταυτόχρονα δύο διαφορετικές οπτικές ως προς τα κριτήρια:
  - Μέγιστη χρησιμότητα ως προς όλα τα κριτήρια.
  - Βαθμός δυσaréσκειας (regret) απέναντι σε κάθε κριτήριο ξεχωριστά.
- Αντιστάθμισμα (trade-off) των δύο παραπάνω οπτικών.
- Προσαρμογή σε προβλήματα Λήψης Αποφάσεων υπό Αβεβαιότητα.
- Επεκτασιμότητα
  - Ασαφή (fuzzy) ή αβέβαια (uncertain) δεδομένα
  - Κριτήρια με ελλιπή πληροφόρηση

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ - ΔΟΜΗ

---

Στα προβλήματα ΠΣΥΑ, συνήθως θεωρούμε:

- Ένα σύνολο εναλλακτικών

$$A = \{A_1, \dots, A_m\}$$

- Ένα σύνολο κριτηρίων

$$C = \{C_1, \dots, C_n\}$$

- Τις επιδόσεις - βαθμολογίες (performances)

$$f_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

των εναλλακτικών σε κάθε κριτήριο.

- Τα βάρη των κριτηρίων

$$W = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑ – ΔΟΜΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

Πίνακας Απόφασης

	$C_1$	$C_2$	...	$C_n$
$A_1$	$f_{11}$	$f_{12}$	...	$f_{1n}$
$A_2$	$f_{21}$	$f_{22}$	...	$f_{2n}$
...	...	...	...	...
$A_m$	$f_{m1}$	$f_{m2}$	...	$f_{mn}$

$$w = (w_1, \dots, w_n)$$

# ΜΕΤΡΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

---

Η μέθοδος VIKOR βασίζεται στη λεγόμενη  $L^p$ -μετρική

$$L_i^p = \left( \sum_{j=1}^n \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty$$

όπου:

- $f_j^*$  αντιστοιχεί στην καλύτερη επίδοση στο κριτήριο  $C_j$ .
- $f_j^-$  αντιστοιχεί στη χειρότερη επίδοση στο κριτήριο  $C_j$ .

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΤΙΜΕΣ MAX & MIN)

---

1. Σε κάθε κριτήριο, προσδιορίζουμε την καλύτερη και την χειρότερη τιμή,  $f_j^*$  και  $f_j^-$ , αντίστοιχα.

- Αν το κριτήριο εκφράζει κάποιο όφελος (benefit), τότε

$$f_j^* = \max_i f_{ij}$$

$$f_j^- = \min_i f_{ij}$$

- Αν το κριτήριο εκφράζει κάποιο κόστος (cost), τότε

$$f_j^* = \min_i f_{ij}$$

$$f_j^- = \max_i f_{ij}$$



# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (S)

---

2. Για κάθε εναλλακτική  $A_i$ , υπολογίζουμε την ποσότητα

$$S_i = \sum_{j=1}^n w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|, \quad i = 1, \dots, m$$

- Η ποσότητα  $S_i$  σχετίζεται με τη σταθμισμένη  $L^1$ -μετρική και εκφράζει τη σταθμισμένη, κανονικοποιημένη απόσταση από τη θετική ιδεατή λύση, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα κριτήρια.
- Προφανώς, επιθυμούμε όσο το δυνατόν μικρότερο  $S$ .
- Αρχή της μέγιστης συνολικής χρησιμότητας (group utility).

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (R)

---

3. Για κάθε εναλλακτική  $A_i$ , υπολογίζουμε επίσης την ποσότητα

$$R_i = \max_j w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|, \quad i = 1, \dots, m$$

- Η  $R_i$  σχετίζεται με την  $L^\infty$ -μετρική και εκφράζει, για κάθε εναλλακτική, τη μέγιστη δυσαρέσκεια «κατά μήκος» των κριτηρίων.
- Προφανώς, επιθυμούμε να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.
- Αρχή της μεμονωμένης δυσαρέσκειας (individual regret).

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (Q)

---

4. Στη VIKOR λαμβάνουμε υπόψη και τις δύο προηγούμενες ποσότητες. Πράγματι, υπολογίζουμε την ποσότητα

$$Q_i = v \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1 - v) \frac{R_i - R^*}{R^- - R^*}, \quad i = 1, \dots, m$$

όπου

$$\begin{aligned} S^* &= \min_i S_i, & S^- &= \max_i S_i \\ R^* &= \min_i R_i, & R^- &= \max_i R_i \end{aligned}$$

Η σταθερά  $0 \leq v \leq 1$  εκφράζει την οπτική του αποφασίζοντα ως προς τις δύο διαφορετικές μετρικές. Εισάγεται για να σταθμίσει τη στρατηγική της μέγιστης συνολικής χρησιμότητας έναντι της στρατηγικής της μεμονωμένης δυσaréσκειας (συνήθως  $v=0.5$ ).

5. Στη συνέχεια, δημιουργούμε τρεις λίστες με τις εναλλακτικές, διατεταγμένες ως προς τα  $S, R$  και  $Q$ .

# ΣΥΝΘΗΚΕΣ - ΛΥΣΗ

---

- Ερώτημα: ποια εναλλακτική προτείνει ως λύση η μέθοδος VIKOR;
- Έστω ότι η εναλλακτική  $A'$  έχει την καλύτερη επίδοση ως προς το μέτρο  $Q$  (minimum). Τότε, η  $A'$  προτείνεται ως λύση, εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- Συνθήκη C1 (*Συγκριτικό πλεονέκτημα*):

$$Q(A'') - Q(A') \geq DQ$$

όπου  $A''$  είναι η αμέσως επόμενη καλύτερη εναλλακτική στην  $Q$ -λίστα και

$$DQ = \frac{1}{m-1}$$

- Συνθήκη C2 (*Ευστάθεια*): Η εναλλακτική  $A'$  είναι η καλύτερη (minimum) ως προς  $S$  ή/και  $R$ .

# ΣΥΝΘΗΚΕΣ – ΛΥΣΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

- Αν δεν ικανοποιείται κάποια από τις συνθήκες, τότε οδηγούμαστε σε *σύνολο λύσεων συμβιβασμού* (compromise solutions set). Συγκεκριμένα:
  - Αν δεν ικανοποιείται μόνο η συνθήκη C2, τότε επιλέγουμε ως λύση τις  $A'$  και  $A''$ .
  - Αν δεν ικανοποιείται η συνθήκη C1, τότε θεωρούμε ως λύση τις εναλλακτικές
$$\{A', A'', \dots, A^{(M)}\}$$
όπου η  $A^{(M)}$  προσδιορίζεται από τη σχέση
$$Q(A^{(M)}) - Q(A') < DQ$$
για το μέγιστο  $M$  που ισχύει η παραπάνω σχέση (εγγύτητα).

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

---

Πίνακας Απόφασης

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A_1$	0.9	800	110
$A_2$	0.7	1000	90
$A_3$	0.6	1100	80
$A_4$	0.8	700	60

Πλήθος εναλλακτικών: 4

Πλήθος κριτηρίων: 3 (οφέλη και τα 3)

Βάρη κριτηρίων:  $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

- Αρχικά, υπολογίζουμε την καλύτερη και τη χειρότερη επίδοση ανά κριτήριο, δηλ. τις τιμές

$$f_j^*, f_j^-, j = 1, 2, 3$$

καθώς και τον παρονομαστή κανονικοποίησης  $f_j^* - f_j^-$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$f_j^*$	0.9	1100	110
$f_j^-$	0.6	700	60
$f_j^* - f_j^-$	0.3	400	50

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον πίνακα που περιέχει τα στοιχεία

$$\left( \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right| \right), i = 1,2,3,4, j = 1,2,3$$

- Είναι ουσιαστικά ο πίνακας που περιέχει τις κανονικοποιημένες δυσαρέσκειες (normalized regrets).

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A_1$	0.00	0.75	0.00
$A_2$	0.67	0.25	0.40
$A_3$	1.00	0.00	0.60
$A_4$	0.33	1.00	1.00

Normalized Regrets



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Υπολογισμός των  $S$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$S_i$
$A_1$	0.00	0.75	0.00	0.25
$A_2$	0.67	0.25	0.40	0.44
$A_3$	1.00	0.00	0.60	0.53
$A_4$	0.33	1.00	1.00	0.77

$$\text{π.χ. } S_1 = \sum_{j=1}^3 w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} = (1/3)(0) + (1/3)(0.75) + (1/3)(0) = 0.25$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

## Υπολογισμός των R

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$R_i$
$A_1$	0.00	0.75	0.00	0.25
$A_2$	0.67	0.25	0.40	0.22
$A_3$	1.00	0.00	0.60	0.33
$A_4$	0.33	1.00	1.00	0.33

$$\text{π.χ. } R_1 = \max \left\{ \left( \frac{1}{3} \right) (0), \left( \frac{1}{3} \right) (0.75), \left( \frac{1}{3} \right) (0) \right\} = 0.25$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

$$S^* = \min\{0.25, 0.44, 0.53, 0.77\} = 0.25$$

$$S^- = \max\{0.25, 0.44, 0.53, 0.77\} = 0.77$$

$$R^* = \min\{0.25, 0.22, 0.33, 0.33\} = 0.22$$

$$R^- = \max\{0.25, 0.22, 0.33, 0.33\} = 0.33$$

Ο αποφασίζων θεωρεί  $\nu=0.5$ . Υπολογίζουμε τα  $Q_i$ :

	$Q_i$
$A_1$	0.14
$A_2$	0.18
$A_3$	0.76
$A_4$	1.00

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

## Οι τρεις λίστες κατάταξης

	$S$	$R$	$Q$
$A_1$	1	2	1
$A_2$	2	1	2
$A_3$	3	3	3
$A_4$	4	3	4

- Τι προτείνεται;
- $A_1$ ;
  - $A_2$ ;
  - Σύνολο συμβιβασμού;

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

- Η  $A_1$ , πέρα από τα  $Q$ , κατατάσσεται πρώτη και στα  $S$ . Άρα έχουμε ευστάθεια.
- $m=4$ , επομένως  $DQ=1/(4-1)=1/3$  και
- $Q(A_2) - Q(A_1) = 0.18 - 0.14 = 0.04 < 1/3$

δηλαδή δεν ικανοποιείται η C1.

- Επίσης,  $Q(A_3) - Q(A_1) = 0.76 - 0.14 = 0.62 > 1/3$ . Άρα  $M=2$ .
- Επομένως, η μέθοδος VIKOR προτείνει ως λύση το σύνολο συμβιβασμού  
 $\{A_1, A_2\}$

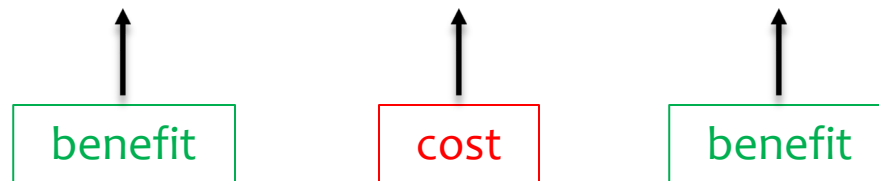
# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- Θεωρούμε τον ίδιο πίνακα απόφασης με το Παράδειγμα 1, όμως τώρα υποθέτουμε ότι το κριτήριο  $C_2$  είναι κριτήριο κόστους!
- Επίσης, αλλάζουμε τα βάρη σε

$$w_1 = 0.3, w_2 = 0.4, w_3 = 0.3$$

Πίνακας Απόφασης

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A_1$	0.9	800	110
$A_2$	0.7	1000	90
$A_3$	0.6	1100	80
$A_4$	0.8	700	60



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$f_j^*$	0.9	700	110
$f_j^-$	0.6	1100	60
$f_j^* - f_j^-$	0.3	400	50

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

$$\left( \frac{|f_j^* - f_{ij}|}{|f_j^* - f_j^-|} \right)$$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A_1$	0.00	0.25	0.00
$A_2$	0.67	0.75	0.40
$A_3$	1.00	1.00	0.60
$A_4$	0.33	0.00	1.00



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

## Υπολογισμός των $S$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$S_i$
$A_1$	0.00	0.25	0.00	0.10
$A_2$	0.67	0.75	0.40	0.62
$A_3$	1.00	1.00	0.60	0.88
$A_4$	0.33	0.00	1.00	0.39

π.χ.

$$S_2 = \sum_{j=1}^3 w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right| = (0.3)(0.67) + (0.4)(0.75) + (0.3)(0.4) = 0.62$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

## Υπολογισμός των $R$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$R_i$
$A_1$	0.00	0.25	0.00	0.10
$A_2$	0.67	0.75	0.40	0.30
$A_3$	1.00	1.00	0.60	0.40
$A_4$	0.33	0.00	1.00	0.30

π.χ.

$$R_2 = \max_j w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right| = \max\{(0.3)(0.67), (0.4)(0.75), (0.3)(0.4)\} \\ = 0.3$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

$$S^* = \min\{0.10, 0.62, 0.88, 0.39\} = 0.10$$

$$S^- = \max\{0.10, 0.62, 0.88, 0.39\} = 0.88$$

$$R^* = \min\{0.10, 0.30, 0.40, 0.30\} = 0.10$$

$$R^- = \max\{0.10, 0.30, 0.40, 0.30\} = 0.40$$

- Ο αποφασίζων θεωρεί  $\nu = 0.4$ . Υπολογίζουμε τα  $Q_i$ :

	$Q_i$
$A_1$	0.00
$A_2$	0.66
$A_3$	1.00
$A_4$	0.54

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

Οι τρεις λίστες κατάταξης

	$S$	$R$	$Q$
$A_1$	1	1	1
$A_2$	3	2	3
$A_3$	4	3	4
$A_4$	2	2	2

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

---

- Η  $A_1$ , πέρα από τα  $Q$ , κατατάσσεται πρώτη και στα  $S$  και  $R$ . Άρα έχουμε ευστάθεια.
- $DQ = 1/3$
- $Q(A_4) - Q(A_1) = 0.54 - 0 = 0.54 > 1/3$ . Συγκριτικό πλεονέκτημα της  $A_1$ .
- Επομένως, η μέθοδος VIKOR προτείνει ως λύση την εναλλακτική  $A_1$ .

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

- Opricovic S. & Tzeng G.-H. (2004). *Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS*, European Journal of Operational Research 156 (2), pp. 445-455.
- Opricovic S. & Tzeng G.-H. (2007). *Extended VIKOR method in comparison with out ranking methods*, European Journal of Operational Research 178 (2), pp. 514-529.
- Sayadi M.K., Heydari M., & Shahanaghi K. (2009). *Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers*, Applied Mathematical Modelling 33 (5), pp. 2257-2262.

Thank  
you!

Georgios Trachanas  
Email: [gtrachanas@epu.ntua.gr](mailto:gtrachanas@epu.ntua.gr)