



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΒΑΡΩΝ

Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Έρα Νεοφύτου, Χάρης Δούκας, Ιωάννης Ψαρράς

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Διαφορετικές μέθοδοι για απόδοση βαρών αναλόγως την φύση του προβλήματος και τις προτιμήσεις του αναλυτή/αποφασίζοντα.
- Απλές μέθοδοι-Σύνθετοι μέθοδοι.
- Οι μέθοδοι που θα αναπτυχθούν εδώ βασίζονται στην υποκειμενική αντίληψη του αποφασίζοντα.
- Διαφορετική κουλτούρα, μορφωτικό επίπεδο, αντίληψη αλλά και είδος βαθμονόμησης.

EQUAL WEIGHTING

- Όλα τα κριτήρια αξιολόγησης έχουν την ίδια σημασία για τον αποφασίζοντα.

Δεδομένου ότι:

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1$$

Τα βάρη των κριτηρίων υπολογίζονται από την σχέση:

$$w_j(EW) = \frac{1}{n}, j=1\dots, n$$

Όπου n: το πλήθος των κριτηρίων αξιολόγησης

EQUAL WEIGHTING-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Έστω ότι έχουμε μια συνεπή οικογένεια κριτηρίων με $n=7$:

Τότε :

$$w_j(EW) = \frac{1}{7}, j=1\dots, 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1=w_2= w_3= w_4= w_5= w_6= w_7=0,143$$

ΑΜΕΣΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ

- Ερώτηση αναλυτή προς αποφασίζοντα να προσδιορίσει την σημαντικότητα ενός κριτηρίου σε μία κλίμακα (π.χ. από 1 ελάχιστα σημαντικό μέχρι 10 πάρα πολύ σημαντικό)
- Υπολογισμός σχετικής σημαντικότητας (relative importance), διαιρώντας κάθε απόλυτη βαθμολογία κριτηρίου με το συνολικό άθροισμα που έχει επιτευχθεί (ώστε το άθροισμα των βαρών να ισούται με 1)

ΑΜΕΣΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Έστω μία οικογένεια κριτηρίων $F[a, b, c, d, e, f]$
- Δίνεται κλίμακα: 1 (λίγο σημαντικό), 2 (σημαντικό), 3 (πολύ σημαντικό)

| Κριτήρια | Τιμές αποφασίζοντα | Υπολογισμός | w |
|-----------------|--------------------|-----------------|-------|
| a | 3 | $=\frac{3}{12}$ | 0,250 |
| b | 3 | $=\frac{3}{12}$ | 0,250 |
| c | 2 | $=\frac{2}{12}$ | 0,167 |
| d | 1 | $=\frac{1}{12}$ | 0,083 |
| e | 2 | $=\frac{2}{12}$ | 0,167 |
| f | 1 | $=\frac{1}{12}$ | 0,083 |
| Άθροισμα | 12 | | |

ROC

- Rank Order Centroid
- Barron and Barrett 1996
- Βασίζεται στην υποκειμενική αντίληψη του αποφασίζοντα.
- Τα βάρη προκύπτουν με αριθμητική «μετάφραση» της κατάταξης των κριτηρίων και αναδεικνύουν την περισσότερο προτιμητέα επιλογή.
- Τα βάρη αντικατοπτρίζουν το «κέντρο μάζας» της κατάταξης.
- Δίνεται η μεγαλύτερη δυνατή απόσταση μεταξύ των βαρών του περισσότερου και του λιγότερου σημαντικού κριτηρίου.

ROC

- Ο αποφασίζων κατατάσσει τα κριτήρια από το περισσότερο στο λιγότερο σημαντικό.
- Βάσει της κατάταξης αποδίδεται σε ποσοστό η βαρύτητα της υποκειμενικής άποψης του αποφασίζοντος.
- Μελέτες έχουν δείξει ότι η μέθοδος εμφανίζει τις καλύτερες επιδόσεις μεταξύ άλλων «μεθόδων αντικατάστασης» (surrogate methods), όσον αφορά την ακρίβεια.

$$w_i(ROC) = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}, i = 1, \dots, n$$

Όπου

n: το πλήθος των κριτηρίων αξιολόγησης και

i: θέση κριτηρίου στην κατάταξη

ROC - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Έστω μία οικογένεια κριτηρίων $F\{a,b,c,d\}$
- Κατάταξη από το περισσότερο στο λιγότερο σημαντικό

| Κατάταξη | Υπολογισμός | Αποτέλεσμα |
|----------|--|------------|
| c, i=1 | $w_1 = \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ | 0,52 |
| b, i=2 | $w_2 = \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ | 0,27 |
| d, i=3 | $w_3 = \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$ | 0,15 |
| a, i=4 | $w_4 = \frac{1}{4} * \left(\frac{1}{4}\right)$ | 0,06 |

SIMOS

- Μέθοδος των καρτών
- Αναπτύχθηκε από τον Jean Simos το 1990
- Ιεράρχηση των κριτηρίων ως προς την σημαντικότητά τους από τον αποφασίζοντα
- "Παιχνίδι καρτών" -> Συσχέτιση μιας κάρτας με ένα κριτήριο -> απόδοση αριθμητικών τιμών
- Ευρεία εφαρμογή σε διαφορετικά είδη προβλημάτων
- Απλότητα και ευκολία κατά την αποτύπωση των προτιμήσεων του αποφασίζοντα
- Συμβατότητα με τις πολυκριτήριες μεθόδους υπεροχής

SIMOS

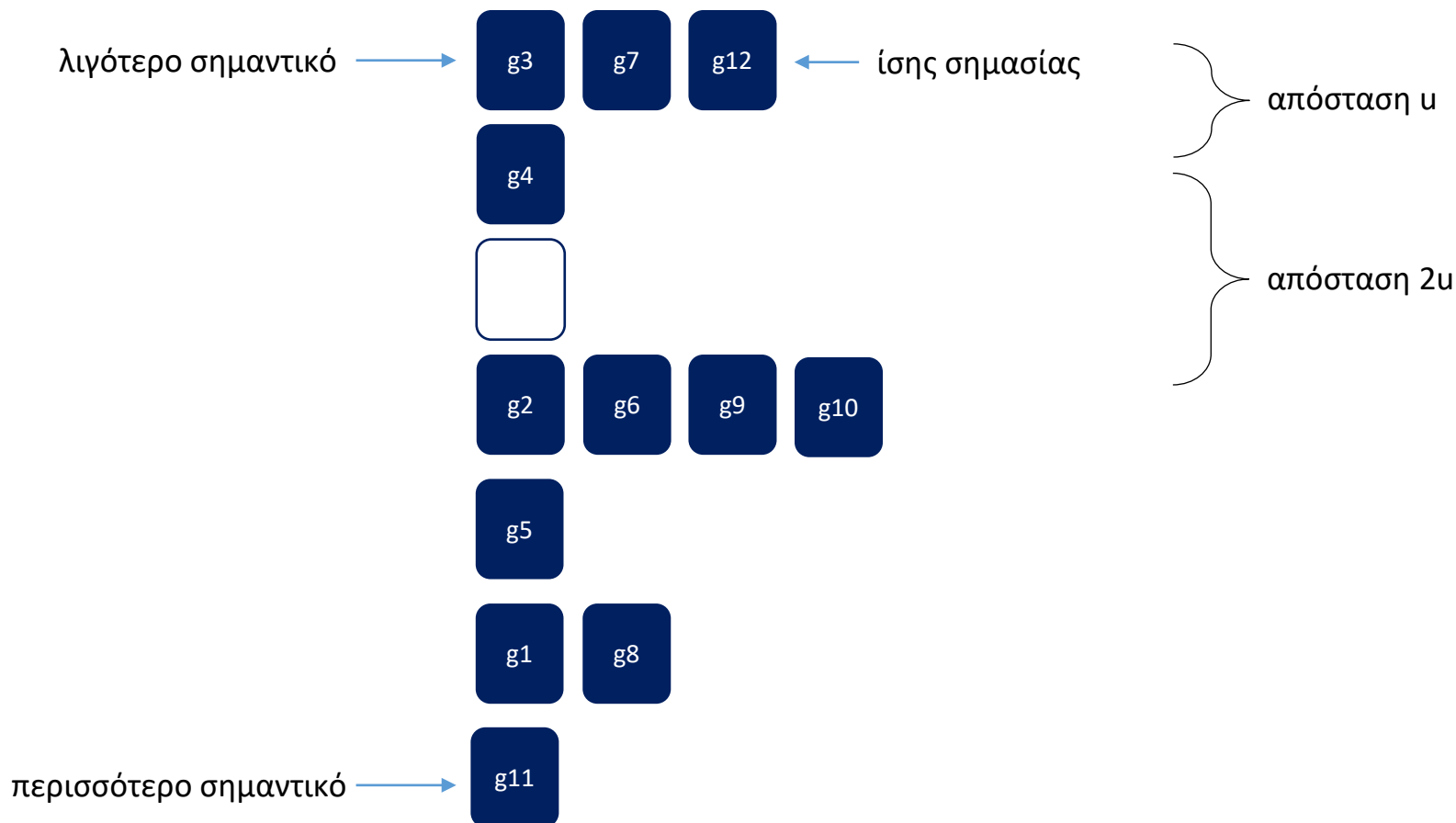
○ Μεθοδολογία (αποφασίζων – κατάταξη καρτών)

- Ο αποφασίζων λαμβάνει ένα σύνολο καρτών με το όνομα ενός κριτηρίου σε κάθε μία (n κάρτες, το καθένα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο κριτήριο μιας οικογένειας F). Μια σειρά από λευκές κάρτες παρέχονται επίσης στον αποφασίζοντα.
- Ο αποφασίζων καλείται να ταξινομήσει τις κάρτες / κριτήρια από το λιγότερο σημαντικό στο περισσότερο, οργανώνοντάς τα με αύξουσα σειρά. Εάν πολλαπλά κριτήρια έχουν την ίδια βαρύτητα, θα πρέπει να δημιουργήσει ένα υποσύνολο διατηρώντας τις αντίστοιχες κάρτες μαζί με ένα κλιπ.
- Τέλος, ο αποφασίζων καλείται να εισάγει λευκές κάρτες μεταξύ δύο διαδοχικών καρτών (ή υποσύνολα κριτηρίων ex aequo) αν θεωρεί ότι η διαφορά μεταξύ τους είναι πιο εκτεταμένη. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά μεταξύ της σημαντικότητας των κριτηρίων (ή των υποσύνολων κριτηρίων), τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των λευκών καρτών που πρέπει να τοποθετηθούν μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, εάν το u υποδηλώνει τη διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών καρτών κριτηρίων, τότε μια λευκή κάρτα σημαίνει διαφορά 2u, δύο λευκές κάρτες σημαίνουν διαφορά 3u, κλπ.

SIMOS

- Γραφική απεικόνιση κατάταξης καρτών από τον αποφασίζοντα

[g1...g12]: κριτήρια



SIMOS

- «Αριθμητική Αποτύπωση»
 - Κατάταξη των υποσυνόλων από το λιγότερο σημαντικό έως το πιο σημαντικό, λαμβάνοντας επίσης υπόψη τις λευκές κάρτες.
 - Υπολογισμός πλήθους καρτών ανά κλάση.
 - Απόδοση μιας θέσης σε κάθε κριτήριο / κάρτα και σε κάθε λευκή κάρτα.
 - Υπολογισμός των μη κανονικοποιημένων βαρών.
 - Προσδιορισμός των κανονικοποιημένων βαρών.
 - Υπολογισμός των βαρών του κάθε κριτηρίου.

SIMOS - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

| Κλάση | Αριθμός Καρτών | Θέσεις | Μη κανονικοποιημένο βάρος Άθροισμα θέσεων | Κανονικοποιημένο βάρος | Σύνολο (Βάρος κλάσης) | Βάρος |
|---|----------------|---------|--|--|-----------------------|---------------|
| {g ₃ , g ₇ , g ₁₂ } | 3 | 1,2,3 | $\frac{1 + 2 + 3}{3} = 2$ | $\frac{2}{86} \times 100 = 2,3 \rightarrow 2$ | 3x2=6 | 6/3/100=0,02 |
| {g ₄ } | 1 | 4 | 4 | $\frac{4}{86} \times 100 = 4,7 \rightarrow 5$ | 1x5=5 | 5/1/100=0,05 |
| Λευκή | 1 | (5) | - | - | - | |
| {g ₂ , g ₆ , g ₉ , g ₁₀ } | 4 | 6,7,8,9 | $\frac{6 + 7 + 8 + 9}{4} = 7,5$ | $\frac{7,5}{86} \times 100 = 8,7 \rightarrow 9$ | 4x9=36 | 36/4/100=0,09 |
| {g ₅ } | 1 | 10 | 10 | $\frac{10}{86} \times 100 = 11,6 \rightarrow 12$ | 1x12=12 | 12/1/100=0,12 |
| {g ₁ , g ₈ } | 2 | 11,12 | $\frac{11 + 12}{2} = 11,5$ | $\frac{11,5}{86} \times 100 = 13,4 \rightarrow 13$ | 2x13=26 | 26/2/100=0,13 |
| {g ₁₁ } | 1 | 13 | 13 | $\frac{13}{86} \times 100 = 15,1 \rightarrow 15$ | 1x15=15 | 15/1/100=0,15 |
| Σύνολο | 13 | 86 | - | - | 100 | |

Άθροισμα θέσεων χωρίς τις λευκές

ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ SIMOS (REVISED)

- Jose Figueira and Bernard Roy (2002)
- Εξαλείφει τα λάθη επεξεργασίας στα υποσύνολα των ίσων κριτηρίων και επεξεργάζεται καλύτερα τη στρογγυλοποίηση των αριθμητικών τιμών που οδηγεί στα κανονικοποιημένα βάρη που έχουν άθροισμα 100
- Νέο είδος πληροφορίας από τον αποφασίζοντα: Z
- Z: πόσες φορές το τελευταίο κριτήριο είναι πιο σημαντικό από το πρώτο της κατάταξης ($Z \leq 10$)
- Χρήση λογισμικού SRF για υπολογισμό βαρών

AHP

- Analytical Hierarchy Process
- Αναπτύχθηκε από τον Saaty το 1980
- Η σχετική προτεραιότητα κάθε κριτηρίου σε σχέση με κάθε ένα από τα άλλα προέρχεται από μια σύγκριση ανά ζεύγη χρησιμοποιώντας μια αριθμητική κλίμακα
- Βασικές αρχές: α) δημιουργία ιεραρχίας β) προσδιορισμός προτεραιοτήτων γ) λογική συνέπεια
- Απλότητα, σαφήνεια, ευκολία υλοποίησης

ΑΗΡ

| Ένταση Σχετικής Σημασίας | Ορισμός |
|---|---|
| 1 | Ίσης σπουδαιότητας |
| 2 | |
| 3 | Μέτρια σπουδαιότητα |
| 4 | |
| 5 | Σημαντική σπουδαιότητα |
| 6 | |
| 7 | Πολύ ισχυρή ή αποδεδειγμένη σπουδαιότητα |
| 8 | |
| 9 | Μέγιστη σπουδαιότητα |
| Οι ενδιάμεσες τιμές 2, 4, 6, 8 χρησιμοποιούνται όταν απαιτείται συμβιβασμός | |
| Αντίστροφοι των παραπάνω μη-μηδενικών αριθμών | Αν σε μία δραστηριότητα αντιστοιχίζεται ένας από τους παραπάνω αριθμούς, όταν αυτή συγκρίνεται με μία δεύτερη δραστηριότητα, τότε η δεύτερη δραστηριότητα έχει την αντίστροφη τιμή όταν συγκρίνεται με την πρώτη. |

AHP

- Διμερείς συγκρίσεις κριτηρίων
- Ισχύει πάντα:

$$P_{ij} * P_{ji} = 1$$

- Άθροισμα ανά στήλη

| C_{ij} | g_1 | g_2 | ... | g_j | ... | g_n |
|----------|-------|-------|-----|-----------------|-----|-------|
| g_1 | 1 | | | | | |
| g_2 | | 1 | | | | |
| ... | | | (1) | | | |
| g_i | | | | $P_c[g_i, g_j]$ | | |
| ... | | | | | (1) | |
| g_n | | | | | | 1 |

S_1 S_2 S_c S_j S_c S_n

ΑΗΡ

- Διαίρεση κάθε στοιχείου του πίνακα με το αντίστοιχο άθροισμα για να προκύψει ο κανονικοποιημένος πίνακας

| C_{ij} | g_1 | g_2 | ... | g_j | ... | g_n |
|----------|---------|---------|-----|------------------------|-----|---------|
| g_1 | $1/S_1$ | | | | | |
| g_2 | | $1/S_2$ | | | | |
| ... | | | (1) | | | |
| g_i | | | | $P_c[g_i, g_j]/S_{ij}$ | | |
| ... | | | | | (1) | |
| g_n | | | | | | $1/S_n$ |

Διάνυσμα Προτεραιότητας S'_i

- Διάνυσμα Προτεραιότητας: Άθροισμα ανά γραμμή

AHP

- Βάρος: Διαίρεση κάθε αθροίσματος γραμμής με το πλήθος των κριτηρίων

| | |
|-------|----------|
| | w_i |
| g_1 | S'_1/n |
| g_2 | S'_2/n |
| ... | |
| g_i | S'_i/n |
| ... | |
| g_n | S'_n/n |

AHP

Συνέπεια (Consistency)

The question is how much inconsistency is acceptable.

- Consistency Index (Δείκτης Συνέπειας)

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \longrightarrow \text{Πλήθος κριτηρίων}$$

- Consistency Ratio (Λόγος Συνέπειας)

$$CR = \frac{CI}{RCI}$$

Αποδεκτή τιμή $CR < 0,10$

- RCI: Consistency Index ενός τυχαία παραγόμενου πίνακα

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---|---|------|-----|------|------|------|------|------|
| RCI | 0 | 0 | 0,58 | 0,9 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 |

AHP

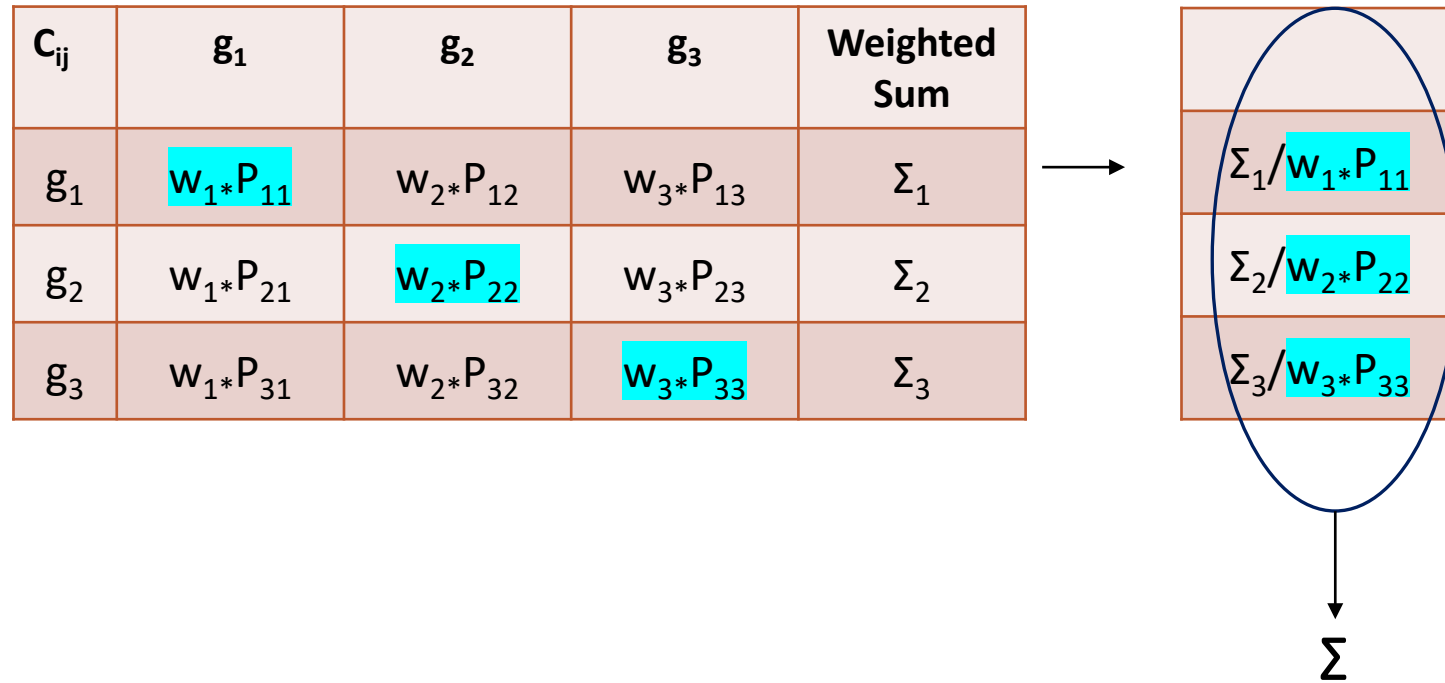
λ_{\max}
(μέγιστη ιδιοτιμή)

| C_{ij} | g_1 | g_2 | g_3 |
|----------|----------|----------|----------|
| w | w_1 | w_2 | w_3 |
| g_1 | P_{11} | P_{12} | P_{13} |
| g_2 | P_{21} | P_{22} | P_{23} |
| g_3 | P_{31} | P_{32} | P_{33} |

Weighted
columns

| C_{ij} | g_1 | g_2 | g_3 | Weighted Sum |
|----------|----------------|----------------|----------------|--------------|
| g_1 | $w_1 * P_{11}$ | $w_2 * P_{12}$ | $w_3 * P_{13}$ | Σ_1 |
| g_2 | $w_1 * P_{21}$ | $w_2 * P_{22}$ | $w_3 * P_{23}$ | Σ_2 |
| g_3 | $w_1 * P_{31}$ | $w_2 * P_{32}$ | $w_3 * P_{33}$ | Σ_3 |

AHP



$$\lambda_{max} = \frac{\Sigma}{n}$$

ΑΗΡ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Διμερείς συγκρίσεις κριτηρίων
- Άθροισμα ανά στήλη

| | g_1 | g_2 | g_3 | g_4 | g_5 | g_6 | g_7 |
|-------|--------------|--------------|-------------|--------------|-------------|-------------|--------------|
| g_1 | 1,00 | 0,50 | 0,25 | 0,33 | 0,50 | 0,20 | 0,25 |
| g_2 | 2,00 | 1,00 | 0,20 | 4,00 | 0,33 | 0,20 | 0,50 |
| g_3 | 4,00 | 5,00 | 1,00 | 5,00 | 3,00 | 0,33 | 3,00 |
| g_4 | 3,00 | 0,25 | 0,20 | 1,00 | 0,33 | 0,20 | 0,33 |
| g_5 | 2,00 | 3,00 | 0,33 | 3,00 | 1,00 | 0,33 | 1,00 |
| g_6 | 5,00 | 5,00 | 3,00 | 5,00 | 3,00 | 1,00 | 5,00 |
| g_7 | 4,00 | 2,00 | 0,33 | 3,00 | 1,00 | 0,20 | 1,00 |
| S_j | 21,00 | 16,75 | 5,32 | 21,33 | 9,17 | 2,47 | 11,08 |

ΑΗΡ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Διαίρεση στοιχείων με τα αθροίσματα στηλών
- Άθροισμα γραμμών

| | g_1 | g_2 | g_3 | g_4 | g_5 | g_6 | g_7 | S'_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| g_1 | 0,05 | 0,03 | 0,05 | 0,02 | 0,05 | 0,08 | 0,02 | 0,30 |
| g_2 | 0,10 | 0,06 | 0,04 | 0,19 | 0,04 | 0,08 | 0,05 | 0,54 |
| g_3 | 0,19 | 0,30 | 0,19 | 0,23 | 0,33 | 0,14 | 0,27 | 1,64 |
| g_4 | 0,14 | 0,01 | 0,04 | 0,05 | 0,04 | 0,08 | 0,03 | 0,39 |
| g_5 | 0,10 | 0,18 | 0,06 | 0,14 | 0,11 | 0,14 | 0,09 | 0,81 |
| g_6 | 0,24 | 0,30 | 0,56 | 0,23 | 0,33 | 0,41 | 0,45 | 2,52 |
| g_7 | 0,19 | 0,12 | 0,06 | 0,14 | 0,11 | 0,08 | 0,09 | 0,79 |

ΑΗΡ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Βάρος: Διαίρεση κάθε αθροίσματος γραμμής με το πλήθος των κριτηρίων
- $n=7$

| | w |
|-------|----------|
| w_1 | 0,04 |
| w_2 | 0,08 |
| w_3 | 0,23 |
| w_4 | 0,06 |
| w_5 | 0,12 |
| w_6 | 0,36 |
| w_7 | 0,11 |

ΑΗΡ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Συνέπεια (Consistency)

| | g_1 | g_2 | g_3 | g_4 | g_5 | g_6 | g_7 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| w | 0,04 | 0,08 | 0,23 | 0,06 | 0,12 | 0,36 | 0,11 |
| g_1 | 1,00 | 0,50 | 0,25 | 0,33 | 0,50 | 0,20 | 0,25 |
| g_2 | 2,00 | 1,00 | 0,20 | 4,00 | 0,33 | 0,20 | 0,50 |
| g_3 | 4,00 | 5,00 | 1,00 | 5,00 | 3,00 | 0,33 | 3,00 |
| g_4 | 3,00 | 0,25 | 0,20 | 1,00 | 0,33 | 0,20 | 0,33 |
| g_5 | 2,00 | 3,00 | 0,33 | 3,00 | 1,00 | 0,33 | 1,00 |
| g_6 | 5,00 | 5,00 | 3,00 | 5,00 | 3,00 | 1,00 | 5,00 |
| g_7 | 4,00 | 2,00 | 0,33 | 3,00 | 1,00 | 0,20 | 1,00 |

ΑΗΡ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Συνέπεια (Consistency)

| | g ₁ | g ₂ | g ₃ | g ₄ | g ₅ | g ₆ | g ₇ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| g ₁ | 0,04 | 0,04 | 0,06 | 0,02 | 0,06 | 0,07 | 0,03 |
| g ₂ | 0,09 | 0,08 | 0,05 | 0,22 | 0,04 | 0,07 | 0,06 |
| g ₃ | 0,17 | 0,39 | 0,23 | 0,28 | 0,35 | 0,12 | 0,34 |
| g ₄ | 0,13 | 0,02 | 0,05 | 0,06 | 0,04 | 0,07 | 0,04 |
| g ₅ | 0,09 | 0,23 | 0,08 | 0,17 | 0,12 | 0,12 | 0,11 |
| g ₆ | 0,21 | 0,39 | 0,70 | 0,28 | 0,35 | 0,36 | 0,57 |
| g ₇ | 0,17 | 0,16 | 0,08 | 0,17 | 0,12 | 0,07 | 0,11 |

| Weighted Sum | |
|--------------|------|
| 0,32 | 7,44 |
| 0,60 | 7,74 |
| 1,88 | 8,00 |
| 0,40 | 7,15 |
| 0,91 | 7,87 |
| 2,86 | 7,94 |
| 0,87 | 7,69 |

$$\lambda_{max} = \frac{\Sigma}{n} = \frac{53,83}{7} = 7,69$$

Σ=53,83

AHP

Συνέπεια (Consistency)

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} = \frac{7,69 - 7}{6} = 0,12$$

$$CR = \frac{CI}{RCI} = \frac{0,12}{1,32} = 0,0872 < 0,10$$

✓ Αποδεκτή τιμή CR

| | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| RCI | 0 | 0 | 0,58 | 0,9 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 |

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Thank
you!

Έηρα Νεοφύτου

Email: hneofytou@epu.ntua.gr