

---

# ΕΝΟΤΗΤΑ 8

## Θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας

---

### Εισαγωγή

Η θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας αποτελεί γενίκευση της κλασσικής θεωρίας χρησιμότητας. Ήδη από τα πρώτα στάδια ανάπτυξης της πολυκριτήριας ανάλυσης, η θεωρία πολυκριτήριας χρησιμότητας αποτέλεσε (και αποτελεί) έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους της θεωρητικής ανάπτυξης και πρακτικής εφαρμογής των αρχών της πολυκριτήριας ανάλυσης. Έμμεσα ή άμεσα και τα υπόλοιπα θεωρητικά ρεύματα της πολυκριτήριας ανάλυσης βασίζονται στις βασικές έννοιες και αρχές της θεωρίας πολυκριτήριας χρησιμότητας. Ο πολυκριτήριος μαθηματικός προγραμματισμός, για παράδειγμα, αποσκοπεί στον εντοπισμό μιας αποτελεσματικής λύσης, η οποία μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα των αποφασιζόντων. Μάλιστα, βασικό σημείο ορισμένων μεθόδων πολυκριτήριου μαθηματικού προγραμματισμού αποτελεί η σαφής ανάπτυξη της συνάρτησης χρησιμότητας που διέπει την πολιτική που ακολουθεί ο αποφασίζων, η οποία στη συνέχεια μεγιστοποιείται στην περιοχή των εφικτών λύσεων ώστε να εντοπιστεί η κατάλληλη αποτελεσματική λύση.

Σκοπός της θεωρίας πολυκριτήριας χρησιμότητας είναι η μοντελοποίηση και αναπαράσταση του συστήματος αξιών που συνειδητά ή ασυνείδητα ακολουθεί ο αποφασίζων, μέσω μιας συνάρτησης αξιών/χρησιμότητας  $U(\mathbf{g})$ . Η συνάρτηση αυτή εκφράζεται βάσει του συνόλου των κριτηρίων αξιολόγησης, τα οποία καθορίζουν το αποτέλεσμα της αξιολόγησης:

$$U(\mathbf{g}) = U(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

όπου  $\mathbf{g}$  είναι το διάνυσμα των κριτηρίων αξιολόγησης του προβλήματος  $g_1, g_2, \dots, g_n$ .

Γενικά, οι συναρτήσεις χρησιμότητας είναι μη γραμμικές αύξουσες συναρτήσεις οριζόμενες στο πεδίο τιμών των αντίστοιχων κριτηρίων αξιολόγησης, οι οποίες ανταποκρίνονται στις ακόλουθες δύο βασικές ιδιότητες.

$$U(\mathbf{g}_m) > U(\mathbf{g}_n) \Leftrightarrow m \succ n$$

$$U(\mathbf{g}_m) = U(\mathbf{g}_n) \Leftrightarrow m \sim n$$

Η πλέον συνηθισμένη μορφή συνάρτησης χρησιμότητας που χρησιμοποιείται σε ερευνητικό και πρακτικό επίπεδο, είναι η προσθετική:

$$U(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n p_i u_i(g_i)$$

όπου,

- $u_1, u_2, \dots, u_n$  είναι οι συναρτήσεις μερικών χρησιμοτήτων των κριτηρίων αξιολόγησης. Κάθε συνάρτηση μερικής χρησιμότητας  $u_i(g_i)$  καθορίζει την αξία/χρησιμότητα των εναλλακτικών δραστηριοτήτων βάσει των επιδόσεων τους στο κριτήριο  $g_i$ .
- $p_1, p_2, \dots, p_n$  είναι σταθερές που υποδηλώνουν τη σημαντικότητα (βάρος) των κριτηρίων αξιολόγησης, τέτοιες ώστε:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Στο πλαίσιο της προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας κάθε επίπεδο σημαντικότητας  $p_i$  υποδεικνύει την παραχώρηση (που είναι διατεθειμένος να κάνει ο αποφασίζων σε ένα κριτήριο αναφοράς, προκειμένου να επιτύχει αύξηση μιας μονάδας στο κριτήριο  $g_i$ ).

Όπως φαίνεται από τη μορφή της προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας, αυτή αποτελεί μια γενίκευση του γνωστού σταθμισμένου μέσου, ο οποίος δεν είναι παρά μια προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας, στην οποία όλες οι συναρτήσεις μερικών χρησιμοτήτων είναι γραμμικές.

$$WSM(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n w_i u_i(g_i)$$

Η βασική υπόθεση που διέπει τη χρησιμοποίηση της προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας αφορά την αμοιβαία προτιμησησική ανεξαρτησία των κριτηρίων αξιολόγησης. Ένα υποσύνολο  $\mathbf{g}'$  του συνόλου των κριτηρίων αξιολόγησης ( $\mathbf{g}' \subseteq \mathbf{g}$ ), θεωρείται ότι είναι προτιμησησικά ανεξάρτητο των υπολοίπων κριτηρίων, εάν και μόνο εάν οι προτιμήσεις του αποφασίζοντος σχετικά με τις εξεταζόμενες εναλλακτικές δραστηριότητες, οι οποίες διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς τα κριτήρια  $\mathbf{g}'$ , δεν επηρεάζονται από τα υπόλοιπα κριτήρια. Το σύνολο  $\mathbf{g}$  των κριτηρίων αξιολόγησης θεωρείται ότι πληροί την υπόθεση της αμοιβαίας προτιμησησικής ανεξαρτησίας εάν και μόνο εάν κάθε υποσύνολο  $\mathbf{g}' \subseteq \mathbf{g}$  είναι προτιμησησικά ανεξάρτητο των υπολοίπων κριτηρίων.

Αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας πολυκριτηριακής χρησιμότητας, των θεωρητικών αρχών που τη διέπουν, καθώς και των εφαρμογών της, πραγματοποιείται στο βιβλίο των Keeney και Raiffa (1993).

Γενικά, η διαδικασία ανάπτυξης μιας συνάρτησης χρησιμότητας βασίζεται στη συνεργασία ενός ειδικού αναλυτή με τον αποφασίζοντα. Για τον σαφή καθορισμό της συνάρτησης χρησιμότητας θα πρέπει να καθοριστούν το επίπεδο σημαντικότητας των κριτηρίων αξιολόγησης, καθώς και η μορφή των συναρτήσεων μερικών χρησιμοτήτων.

Οι συντελεστές βαρύτητας των κριτηρίων αξιολόγησης έχουν την έννοια των παραχωρήσεων που ο αποφασίζων είναι διατεθειμένος να κάνει σε ένα κριτήριο αξιολόγησης προκειμένου να βελτιώσει κάποιο άλλο κριτήριο αξιολόγησης.

## Μεθοδολογικό πλαίσιο

Αναλυτικά, τα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος θεωρίας πολυκριτήριας χρησιμότητας είναι τα εξής:

### 1) Προσδιορισμός εναλλακτικών και κριτηρίων αξιολόγησης

Αρχικά, προσδιορίζονται οι διαθέσιμες εναλλακτικές και τα πιο σχετικά με την απόφαση κριτήρια, βάσει των οποίων οι αποφασίζοντες θα κληθούν να επιλέξουν τη βέλτιστη λύση.

Τα κριτήρια που επιλέγονται στη MAUT οφείλουν να είναι:

- πλήρη/επαρκή: όλες οι σημαντικές πτυχές του προβλήματος καλύπτονται από αυτά
- λειτουργικά: είναι ουσιαστικά για τη λήψη της απόφασης
- μονότονα: οι βαθμολογίες που αντιστοιχίζονται στα επίπεδα των κριτηρίων (και όχι απαραίτητα τα επίπεδα των κριτηρίων καθαυτά) εμφανίζουν μονοτονία
- μη πλεοναστικά: η διαγραφή οποιουδήποτε κριτηρίου παραβαίνει την επάρκεια, λειτουργικότητα και μονοτονία του συνόλου των κριτηρίων

Ειδικότερα, ενδέχεται να μην υπάρχει μονοτονία στα επίπεδα των κριτηρίων (π.χ. για το κριτήριο «όροφος» στην επιλογή διαμερίσματος, ο 2<sup>ος</sup> όροφος προτιμάται από το ισόγειο, όμως ο 8<sup>ος</sup> όροφος μπορεί να θεωρείται χειρότερη επιλογή από τον 3<sup>ο</sup> όροφο).

Η χρησιμότητα μπορεί να μην είναι γραμμικά μονότονη, αλλά να εμφανίζει κυρτότητα.

### 2) Αξιολόγηση κάθε εναλλακτικής ξεχωριστά για κάθε κριτήριο

Το επίπεδο κριτηρίου σημαίνει μία ποσοτική ή ποιοτική τιμή που περιγράφει μία εναλλακτική σε ένα συγκεκριμένο κριτήριο.

Η βαθμολογία (αριθμητική τιμή) που αντιστοιχεί στο επίπεδο του κριτηρίου σημαίνει προτίμηση των αποφασιζόντων εκφρασμένη ποσοτικά σε μία δεδομένη κλίμακα.

### 3) Απόδοση σχετικών βαρών στα κριτήρια

Μετά την αξιολόγηση των εναλλακτικών σε κάθε κριτήριο, προσδιορίζεται η σημαντικότητα κάθε κριτηρίου μέσω της απόδοσης βαρών σε αυτά.

Μετά την απόδοση βαρών, υπολογίζονται τα κανονικοποιημένα βάρη:

$$w_i = \frac{w_i'}{\sum_{i=1}^n w_i'}$$

#### 4) Υπολογισμός της πολυκριτήριας χρησιμότητας κάθε εναλλακτικής

Οι μονοκριτήριες τιμές ή συναρτήσεις χρησιμότητας των κριτηρίων  $g_i$  μπορούν να συντεθούν σε μία πολυκριτήρια χρησιμότητα με τη χρήση ποικίλων μοντέλων  $U$ :

$$U(g) = U(g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Όμως, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, συνήθως χρησιμοποιείται η προσθετική συνάρτηση χρησιμότητας:

$$U(g) = \sum_{i=1}^n p_i u_i(g_i)$$

### Βιβλιογραφία

- Keeney, R. L., & Raiffa, H. (1993). *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs*. Cambridge university press.
- Δούμπος, Μ., (2000). Πολυκριτήριες μέθοδοι ταξινόμησης και εφαρμογές στη χρηματοοικονομική διοίκηση. Διδακτορική Διατριβή. Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- Von Winterfeldt, D., & Fischer, G. W. (1975). Multi-attribute utility theory: models and assessment procedures. In *Utility, probability, and human decision making* (pp. 47-85). Springer, Dordrecht.
- Torrance, G. W., Boyle, M. H., & Horwood, S. P. (1982). Application of multi-attribute utility theory to measure social preferences for health states. *Operations research*, 30(6), 1043-1069.
- Humphreys, P. (1977). Application of multi-attribute utility theory. In *Decision making and change in human affairs* (pp. 165-207). Springer, Dordrecht.
- Wallenius, J., Dyer, J. S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Zionts, S., & Deb, K. (2008). Multiple criteria decision making, multiattribute utility theory: Recent accomplishments and what lies ahead. *Management science*, 54(7), 1336-1349.