
ΕΝΟΤΗΤΑ 3

Προσδιορισμός Βαρών

Εισαγωγή

Οι μέθοδοι προσδιορισμού των βαρών ποικίλουν ανάλογα με τη φύση του εκάστοτε προβλήματος πολυκριτήριας απόφασης και τις προτιμήσεις του αναλυτή και του αποφασίζοντα. Η μέθοδος που θα επιλεγεί για να υπολογιστούν οι συντελεστές βαρύτητας των κριτηρίων μπορεί να είναι απλή υπολογιστικά (πχ. Άμεση εκτίμηση) ή πιο σύνθετη (πχ. SIMOS, AHP). Στις μεθόδους που θα αναπτυχθούν παρακάτω, οι βαρύτητες αποδίδονται σύμφωνα με την υποκειμενική αντίληψη του αποφασίζοντα.

Για τα βάρη ισχύει πάντα ο περιορισμός:

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad (1)$$

Όπου w_j το βάρος του j -οστού κριτηρίου.

Equal weighting

Στην περίπτωση που ο αποφασίζων δε θέλει να δώσει καμία βαρύτητα σε κάποιο από τα κριτήρια αξιολόγησης, αλλά προτιμά να αντιμετωπιστούν όλα με την ίδια σημαντικότητα τότε ο αναλυτής αρκεί να διαιρέσει την μονάδα με το πλήθος των κριτηρίων του προβλήματος. (Εφόσον ισχύει ότι το άθροισμα των βαρών σε μία οικογένεια κριτηρίων ισούται με το 1 πάντα).

Τα βάρη των κριτηρίων υπολογίζονται από την σχέση:

$$w_j(EW) = \frac{1}{n}, j=1, \dots, n \quad (2)$$

Όπου n : το πλήθος των κριτηρίων αξιολόγησης

Άμεση Εκτίμηση (direct assessment)

Κατά τη διαδικασία άμεσης εκτίμησης των συντελεστών βαρύτητας, ο αναλυτής θέτει στον αποφασίζων το ερώτημα προσδιορισμού της σημαντικότητας των κριτηρίων αξιολόγησης, χρησιμοποιώντας μια απόλυτη κλίμακα. Για παράδειγμα δίνεται το διάστημα $[1, 10]$ που απεικονίζει την ελάχιστη σημασία ενός κριτηρίου μέσω του 1 και την μέγιστη μέσω του 10. Στη συνέχεια, και εφόσον ο αποφασίζων έχει αποδώσει τις προσωπικές του αξιολογήσεις στα κριτήρια, ο αναλυτής υπολογίζει την σχετική σημαντικότητα (relative importance) των κριτηρίων, διαιρώντας κάθε βαθμολογία που έχει δοθεί στο αντίστοιχο κριτήριο με το άθροισμα των βαθμολογιών. Σκοπός της διαίρεσης αυτής είναι το άθροισμα των βαρών να ισούται με την μονάδα.

Κριτήρια αξιολόγησης	Αξιολογήσεις [1,5]	Βάρη
g_1	e_1	$w_1=e_1/\Sigma$
g_2	e_2	$w_2=e_2/\Sigma$
g_3	e_1	$w_3=e_1/\Sigma$
...
g_n	e_4	$w_n=e_1/\Sigma$
Άθροισμα	$\Sigma=e_1+e_2+e_1+...+e_4$	1

ROC (Rank Order Centroid)

Η μέθοδος ROC αναπτύχθηκε από τους Barron και Barret το 1996. Όπως και οι προηγούμενες μέθοδοι έτσι και αυτή βασίζεται στην υποκειμενική αντίληψη του αποφασίζοντα. Τα βάρη προκύπτουν με αριθμητική «μετάφραση» της κατάταξης των κριτηρίων και αναδεικνύουν την περισσότερο προτιμητέα επιλογή. Δύο βασικά χαρακτηριστικά της είναι ότι τα βάρη αντικατοπτρίζουν το «κέντρο μάζας» της κατάταξης και ότι μεταξύ των βαρών του περισσότερο και του λιγότερου σημαντικού κριτηρίου αποδίδεται η μεγαλύτερη δυνατή απόσταση. Μελέτες έχουν δείξει ότι η μέθοδος εμφανίζει τις καλύτερες επιδόσεις μεταξύ άλλων «μεθόδων αντικατάστασης» (surrogate methods), όσον αφορά την ακρίβεια.

Για τον υπολογισμό των βαρών, ο αποφασίζων καλείται να κατατάξει τα κριτήρια από το περισσότερο στο λιγότερο σημαντικό σύμφωνα με την προσωπική του αντίληψη. Στην συνέχεια, βάσει της κατάταξης, αποδίδεται σε ποσοστό η βαρύτητα της υποκειμενικής άποψης του αποφασίζοντα με τον παρακάτω τύπο:

$$w_i(ROC) = \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Όπου

n : το πλήθος των κριτηρίων αξιολόγησης και

i : θέση κριτηρίου στην κατάταξη

SIMOS

Η μέθοδος SIMOS είναι γνωστή και ως μέθοδος των καρτών, αναπτύχθηκε από τον Jean Simos το 1990 και βασίζεται σε ιεράρχηση των κριτηρίων από τον αποφασίζοντα. Για την απόδοση των συντελεστών βαρύτητας, ακολουθείται η κατάταξη των κριτηρίων μέσω ενός συνόλου καρτών, το οποίο περιλαμβάνει μία κάρτα ανά κριτήριο καθώς και έναν αριθμό από λευκές κάρτες.

Βήματα για την κατάταξη των καρτών:

- Ο αποφασίζων λαμβάνει ένα σύνολο καρτών με το όνομα ενός κριτηρίου σε κάθε μία (n κάρτες, το καθένα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο κριτήριο μιας οικογένειας F). Μια σειρά από λευκές κάρτες παρέχονται επίσης στον αποφασίζοντα.
- Ο αποφασίζων καλείται να ταξινομήσει τις κάρτες/κριτήρια από το λιγότερο σημαντικό στο περισσότερο, οργανώνοντάς τα με αύξουσα σειρά. Εάν πολλαπλά

κριτήρια έχουν την ίδια βαρύτητα, θα πρέπει να δημιουργήσει ένα υποσύνολο διατηρώντας τις αντίστοιχες κάρτες μαζί με ένα κλιπ.

- Τέλος, ο αποφασίζων καλείται να εισάγει λευκές κάρτες μεταξύ δύο διαδοχικών καρτών (ή υποσύνολα κριτηρίων ex aequo) αν θεωρεί ότι η διαφορά μεταξύ τους είναι πιο εκτεταμένη. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά μεταξύ της σημαντικότητας των κριτηρίων (ή των υποσύνολων κριτηρίων), τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των λευκών καρτών που πρέπει να τοποθετηθούν μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, εάν το u υποδηλώνει τη διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών καρτών κριτηρίων, τότε μια λευκή κάρτα σημαίνει διαφορά $2u$, δύο λευκές κάρτες σημαίνουν διαφορά $3u$, κλπ.

Βήματα για τον αριθμητικό υπολογισμό των βαρών:

- Ο αναλυτής κατατάσσει τα υποσύνολων των καρτών από το λιγότερο σημαντικό έως το πιο σημαντικό, λαμβάνοντας επίσης υπόψη τις λευκές κάρτες καταγράφοντας στην πρώτη στήλη ενός πίνακα τα αντίστοιχα κριτήρια.
- Στη συνέχεια, υπολογίζει το πλήθος των καρτών που εμφανίζονται σε κάθε κλάση (επίπεδο).
- Έπειτα αποδίδει μια θέσης σε κάθε κριτήριο/κάρτα και σε κάθε λευκή κάρτα, ξεκινώντας από πάνω προς τα κάτω.
- Επόμενο βήμα αποτελεί ο υπολογισμός των μη κανονικοποιημένων βαρών. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διαίρεσης του αθροίσματος των θέσεων με το αντίστοιχο πλήθος των καρτών της κλάσης. Μη κανονικοποιημένο βάρος δεν υπολογίζεται για τις κλάσεις με τις λευκές κάρτες.
- Στη συνέχεια υπολογίζονται τα κανονικοποιημένα βάρη διαιρώντας το μη κανονικοποιημένο βάρος με το άθροισμα των θέσεων (εκτός των θέσεων των λευκών καρτών) και πολλαπλασιάζοντας με το 100. Τα νούμερα που προκύπτουν στρογγυλοποιούνται στον πλησιέστερο ακέραιο.
- Με σκοπό τον υπολογισμό του βάρους κάθε κλάσης, πολλαπλασιάζεται το στρογγυλοποιημένο νούμερο του κανονικοποιημένου βάρους με το πλήθος των καρτών της αντίστοιχης κλάσης. (Δεν αφορά τις κλάσεις με τις λευκές κάρτες)
- Τέλος, για τον τελικό υπολογισμό των βαρών των κριτηρίων, το βάρος της κάθε κλάσης διαιρείται με το πλήθος των καρτών της κλάσης και στη συνέχεια με το 100. (Το άθροισμα όλων των βαρών πρέπει να ισούται με 1)

Υπάρχει επίσης και η αναθεωρημένη μέθοδος SIMOS (Revised SIMOS), η οποία μελετήθηκε από τον Figueira και Roy (2002). Η μέθοδος αυτή εξαλείφει τα λάθη επεξεργασίας στα υποσύνολα των ίσων κριτηρίων και επεξεργάζεται καλύτερα τη στρογγυλοποίηση των αριθμητικών τιμών που οδηγεί στα κανονικοποιημένα βάρη που έχουν άθροισμα 100. Το νέο δεδομένο που απαιτείται από τον αποφασίζοντα για τον υπολογισμό των βαρών είναι να ορίσει πόσες φορές το τελευταίο κριτήριο είναι πιο σημαντικό από το πρώτο της κατάταξης ($Z \leq 10$). Η μέθοδος αυτή συνήθως επιλύεται με χρήση του λογισμικού SRF.

AHP (Analytical Hierarchy Process)

Η AHP αναπτύχθηκε το 1980 από τον Saaty και βασίζεται στην σχετική προτεραιότητα κάθε κριτηρίου σε σχέση με κάθε ένα από τα άλλα η οποία προέρχεται από μια σύγκριση ανά ζεύγη χρησιμοποιώντας μια αριθμητική κλίμακα

Το πρώτο βήμα στη διαδικασία υπολογισμού των βαρών με την μέθοδο AHP είναι η ανάπτυξη ενός πίνακα για κατά ζεύγη συγκρίσεις, στον οποίο αποτυπώνονται οι

προτιμήσεις του αποφασίζοντα των υπό εξέταση στοιχείων (ανά ζεύγη). Η είσοδος του πίνακα προέρχεται από μια θεμελιώδη κλίμακα που χρησιμοποιείται για τις συγκρίσεις (κλίμακα του Saaty ή κλίμακα σχετικής σημασίας). Η κλίμακα αυτή παρουσιάζεται παρακάτω:

Ένταση Σχετικής Σημασίας	Ορισμός
1	Ίσης σπουδαιότητας
2	
3	Μέτρια σπουδαιότητα
4	
5	Σημαντική σπουδαιότητα
6	
7	Πολύ ισχυρή ή αποδεδειγμένη σπουδαιότητα
8	
9	Μέγιστη σπουδαιότητα
Οι ενδιάμεσες τιμές 2, 4, 6, 8 χρησιμοποιούνται όταν απαιτείται συμβιβασμός	
Αντίστροφοι των παραπάνω μη-μηδενικών αριθμών	Αν σε μία δραστηριότητα αντιστοιχίζεται ένας από τους παραπάνω αριθμούς, όταν αυτή συγκρίνεται με μία δεύτερη δραστηριότητα, τότε η δεύτερη δραστηριότητα έχει την αντίστροφη τιμή όταν συγκρίνεται με την πρώτη.

Στη συνέχεια ο αποφασίζων αποδίδει την σχετική σημαντικότητα μεταξύ των κριτηρίων (ανά ζεύγη) και τα εισάγει στον πίνακα συγκρίσεων:

C_{ij}	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
g_1	1					
g_2		1				
...			(1)			
g_i				$P_c[g_i, g_j]$		
...					(1)	
g_n						1

Για να υπάρχει λογική συνέπεια πρέπει να ισχύει ότι: $P_{ij} * P_{ji} = 1$, δηλαδή αν ένα κριτήριο a έχει θεωρηθεί x φορές σημαντικότερο από ένα κριτήριο b τότε το κριτήριο b θα είναι 1/x φορές σημαντικότερο από το a. Τα στοιχεία της διαγωνίου (τα οποία αποτελούν την σύγκριση του κάθε κριτηρίου με τον εαυτό του) θα είναι ίσα με 1.

Για να υπολογιστούν στη συνέχεια τα βάρη ακολουθούνται τα εξής βήματα:

- Υπολογισμός αθροίσματος ανά στήλη: $S_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}$, για $j=1...n$

C_{ij}	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
g_1	1					
g_2		1				
...			(1)			
g_i				$P_c[g_i, g_j]$		
...					(1)	
g_n						1

S_1 S_2 S_c S_j S_c S_n

- Διαίρεση κάθε στοιχείου του πίνακα με το αντίστοιχο άθροισμα για να προκύψει ο κανονικοποιημένος πίνακας, $\frac{P_{ij}}{S_j}$

C_{ij}	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
g_1	$1/S_1$					
g_2		$1/S_2$				
...			(1)			
g_i				$P_c[g_i, g_j]/S_j$		
...					(1)	
g_n						$1/S_n$

- Υπολογισμός αθροίσματος ανά γραμμή: $S'_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}/S_j$, για $i=1...n$

C_{ij}	g_1	g_2	...	g_j	...	g_n
g_1	$1/S_1$					
g_2		$1/S_2$				
...			(1)			
g_i				$P_c[g_i, g_j]/S_j$		
...					(1)	
g_n						$1/S_n$

$\rightarrow S'_i$

- Υπολογισμός βάρους κριτηρίου: $w_i = S'_i/n$, για $i=1...n$

Ασυνέπεια

Γενικά με τον όρο συνέπεια εννοούμε ότι όταν έχουμε ένα βασικό ποσοστό δεδομένων μιας σειράς του πίνακα, όλα τα υπόλοιπα δεδομένα μπορούν να συναχθούν λογικά από αυτό. Η εννιαβάθμια κλίμακα σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να αποδειχθεί ασυνεπής. Για παράδειγμα, αν ένα κριτήριο a προτιμάται 2 φορές περισσότερο από ένα b, και το b προτιμάται 3 φορές περισσότερο από ένα c, τότε το συνεπές θα ήταν ο αποφασίζων στη σύγκριση μεταξύ a και c να αποδώσει το νούμερο 6. Αν αντί αυτού δώσει μια διαφορετική τιμή (πχ. 2,4,7...) τότε θα δημιουργηθεί ένα είδος ασυνέπειας. Στην μέθοδο AHP μπορεί να γίνει αποδεκτή η ασυνέπεια μέχρι ένα συγκεκριμένο επίπεδο.

Η μέθοδος AHP, περιλαμβάνει ένα φυσικό μέτρο ασυνέπειας για τον πίνακα συγκρίσεων. Η γνώση της ασυνέπειας επιτρέπει την αναγνώριση των κρίσεων για τις οποίες απαιτείται αναθεώρηση. Με αυτό τον τρόπο, μάλιστα, η μέθοδος AHP αποκλίνει ριζικά από τις πιο παραδοσιακές αναλυτικές μεθόδους αποφάσεων, στο ό,τι δηλαδή οι τελευταίες δεν έχουν κανέναν επίσημο τρόπο αντιμετώπισης της ασυνέπειας. Για να υπολογίσουμε την ασυνέπεια και αν αυτή είναι αποδεκτή ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Consistency Index (Δείκτης Συνέπειας)

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \tag{4}$$

Όπου:

n: πλήθος κριτηρίων

λ_{max} : μέγιστη ιδιοτιμή (υπολογίζεται παρακάτω)

- Consistency Ratio (Λόγος Συνέπειας)

$$CR = \frac{CI}{RCI} \tag{4}$$

Όπου:

RCI: Ο δείκτης συνέπειας ενός τυχαία παραγόμενου πίνακα (τυχαίος δείκτης), ο οποίος δίνεται από τον Saaty με βάση το μέγεθος του πίνακα:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RCI	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45

Αν ο λόγος συνέπειας CR είναι μεγαλύτερος από 0,10, τότε ο πίνακας θεωρείται ασυνεπής και ο αποφασίζων πρέπει να αναθεωρήσει τις εισόδους του πίνακα

- λ_{max}
 - Επαναφέρω τον αρχικό πίνακα συγκρίσεων (έστω $n=3$), και αναγράφω στην εκάστοτε στήλη το αντίστοιχο υπολογισμένο βάρος.

C_{ij}	g_1	g_2	g_3
w	w_1	w_2	w_3
g_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}
g_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}
g_3	P_{31}	P_{32}	P_{33}

- Πολλαπλασιάζω την κάθε πρότιμηση με το αντίστοιχο βάρος και υπολογίζω τα αθροίσματα ανά γραμμή

C_{ij}	g_1	g_2	g_3	Σ_i
g_1	$w_1 * P_{11}$	$w_2 * P_{12}$	$w_3 * P_{13}$	Σ_1
g_2	$w_1 * P_{21}$	$w_2 * P_{22}$	$w_3 * P_{23}$	Σ_2
g_3	$w_1 * P_{31}$	$w_2 * P_{32}$	$w_3 * P_{33}$	Σ_3

- Διαιρώ το κάθε άθροισμα με το αντίστοιχο στοιχείο της διαγωνίου και υπολογίζω τον μέσο όρο των αποτελεσμάτων.

$\Sigma_i / w_i * P_{ij}$ (για $i=j$)
$\Sigma_1 / w_1 * P_{11}$
$\Sigma_2 / w_2 * P_{22}$
$\Sigma_3 / w_3 * P_{33}$

↓ Σ

$$\lambda_{max} = \Sigma / n$$

Βιβλιογραφία

- Barron, F. H. (1992). Selecting a best multi-attribute alternative with partial information about attribute weights. *Acta Psychologica*, 80 (1-3), 91-103.
- Barron, F. H., & Barret, B. E. (1996). Decision quality using ranked attribute weights. *Management Science*, 42 (11), 1515-1523 .
- Beyong, S.A., Kyung, S.P. (2006). Comparing methods for multiattribute decision making with ordinal weights. College of Business Administration, Chung-Ang University, Seoul, South Korea, pp. 156-756
- Figueira, J., & Roy, B. (2002). Determining the weights of criteria in the ELECTRE type methods with a revised Simos' procedure. *European Journal of Operational Research*, 139(1-2), 317-326.
- Saaty, T.L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process, Planning, Priority Setting, Resource Allocation*. McGraw-Hill, New York.
- Simos, J. (1990). *Evaluer l'impact sur l'environnement: Une approche originale par l'analyse multicritere et la negociation*. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- Saaty, T.L. (1996). *Multicriteria Decision Making. The Analytic Hierarchy Process. Planning, Priority Setting, Resource Allocation*. RWS Publications, Pittsburgh
- Sennaroglu, B., & Celebi, G. V. (2018). A military airport location selection by AHP integrated PROMETHEE and VIKOR methods. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 59, 160-173.
- Σίσκος, Ι., *Μοντέλα Αποφάσεων - Μεθοδολογία Επιχειρησιακής Έρευνας, Θεωρία Πολυκριτήριας Ανάλυσης, Εφαρμογές σε Επιχειρήσεις και Οργανισμούς, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα, 2008*