

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλ. Βιομηχανικών Διατάξεων & Συστημάτων Αποφάσεων



Πολυκριτηριακά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων

E12 Εντροπία

Χάρης Δούκας, Παναγιώτης Ευδώνας & Γιάννης Ψαρράς

Πληροφοριακό περιεχόμενο κριτηρίων

- Σε κάθε πρόβλημα υποστήριξης αποφάσεων, η σημαντικότητα ενός κριτηρίου είναι συνάρτηση: α) των προτιμήσεων του αποφασίζοντα, και β) της πληροφορίας που το συγκεκριμένο κριτήριο παρέχει στην αξιολόγηση.

Για παράδειγμα, ένα κριτήριο που ο αποφασίζων θεωρεί σημαντικό, μπορεί να μην είναι χρήσιμο σε μια συγκεκριμένη αξιολόγηση, εάν όλες οι εναλλακτικές έχουν περίπου ταυτόσημες επιδόσεις σε αυτό.

- Αντίθετα, ένα κριτήριο που ο αποφασίζοντας θεωρεί λιγότερο σημαντικό, μπορεί να είναι ιδιαίτερα ουσιαστικό για την αξιολόγηση, εάν οι διάφορες εναλλακτικές παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές, ως προς τις επιδόσεις τους στο κριτήριο αυτό.

Η εντροπία στη θεωρία της πληροφορίας

Το πιο διαδεδομένο μέτρο πληροφορίας είναι η εντροπία. Θεωρώντας μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X οι τιμές της οποίας ανήκουν στο σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, η εντροπία ορίζεται ως εξής:

$$H(X) = -K \sum_{i=1}^m p(x_i) \ln p(x_i)$$

όπου $K > 0$ είναι μια σταθερά που προσδιορίζει την κλίμακα της μέτρησης και $p(x_i) = \Pr(X = x_i)$ είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή x_i (στην περίπτωση όπου $p(x_i) = 0$, θεωρείται ότι $p(x_i) \ln p(x_i) = 0$). Όσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία, τόσο θεωρείται ότι αυξάνει η αβεβαιότητα/τυχειότητα για την τυχαία μεταβλητή X .

Εντροπία κριτηρίων απόφασης

Το μέτρο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη μέτρηση της πληροφορίας που παρέχει κάθε κριτήριο σε μια διαδικασία αξιολόγησης ενός συνόλου εναλλακτικών. Έστω λοιπόν ένα σύνολο m εναλλακτικών δραστηριοτήτων, οι επιδόσεις των οποίων σε κάποιο κριτήριο x_j είναι $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}$, με $0 \leq x_{ij} \leq 1$. Συμβολίζοντας ως D_j το άθροισμα των επιδόσεων ($D_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$), η εντροπία του κριτηρίου x_j είναι (Zeleny, 1982):

$$H(x_j) = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{D_j} \ln \frac{x_{ij}}{D_j}$$

Σημαντικότητα κριτηρίων απόφασης

Όσο μεγαλύτερη είναι η εντροπία του κριτηρίου x_j τόσο μικρότερη πληροφορία παρέχει στην περιγραφή και αξιολόγηση των εναλλακτικών. Η μέγιστη τιμή της εντροπίας εμφανίζεται εάν όλες οι εναλλακτικές έχουν την ίδια επίδοση ($x_{1j} = x_{2j} = \dots = x_{mj}$), οπότε $H(x_j) = 1$. Με βάση αυτό το μέτρο εντροπίας, η σημαντικότητά ενός κριτηρίου x_j ανάλογα με την πληροφορία που παρέχει μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{n - \mathcal{H}} [1 - H(x_j)]$$

όπου $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n H(x_j)$ είναι η συνολική εντροπία των κριτηρίων.

Ένα αριθμητικό παράδειγμα

Έστω τα στοιχεία τεσσάρων εναλλακτικών σε τρία κριτήρια που δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	x_1	x_2	x_3
x_1	7	100	4
x_2	8	60	4
x_3	8.5	20	6
x_4	9	80	2

Βήμα 1^ο

Κανονικοποιώντας τις επιδόσεις των εναλλακτικών σε σχέση με τα άριστα επίπεδα των κριτηρίων ($x_1^* = 9$, $x_2^* = 100$, $x_3^* = 6$) σύμφωνα με τη σχέση $x'_{ij} = x_{ij}/x_j^*$, διαμορφώνονται τα ακόλουθα κανονικοποιημένα δεδομένα:

	x_1	x_2	x_3
x_1	0.778	1.000	0.667
x_2	0.889	0.600	0.667
x_3	0.944	0.200	1.000
x_4	1.000	0.800	0.333

	x_1	x_2	x_3
x_1	7	100	4
x_2	8	60	4
x_3	8.5	20	6
x_4	9	80	2

$$x'_{11} = \frac{7}{9} = 0.778$$
$$x'_{32} = \frac{20}{100} = 0.200$$
$$x'_{43} = \frac{2}{6} = 0.333$$

Βήμα 2^ο

Με βάση τα στοιχεία αυτά η εντροπία των τριών κριτηρίων

$$H(x_1) = 0.997 \quad H(x_2) = 0.913 \quad H(x_3) = 0.953$$

	x_1	x_2	x_3
x_1	0.778	1.000	0.667
x_2	0.889	0.600	0.667
x_3	0.944	0.200	1.000
x_4	1.000	0.800	0.333

$$H(x_j) = -\frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{D_j} \ln \frac{x_{ij}}{D_j}$$

$$H(x_1) = -\frac{1}{\ln 4} \times \left(\frac{0.778}{3.611} \ln \frac{0.778}{3.611} + \frac{0.889}{3.611} \ln \frac{0.889}{3.611} + \frac{0.944}{3.611} \ln \frac{0.944}{3.611} + \frac{1}{3.611} \ln \frac{1}{3.611} \right) \Rightarrow$$

$$H(x_1) = -\frac{1}{\ln 4} \times (0.215 \ln 0.215 + 0.246 \ln 0.246 + 0.261 \ln 0.261 + 0.277 \ln 0.277) \Rightarrow$$

$$H(x_1) = -\frac{1}{\ln 4} \times (-0.330 - 0.345 - 0.351 - 0.356) \Rightarrow$$

$$H(x_1) = -0.721 \times (-1.382) \Rightarrow$$

$$H(x_1) = 0.997$$

Βήμα 3^ο

και η σημαντικότητά τους ως προς την πληροφορία που παρέχουν

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.022 \quad \tilde{\lambda}_2 = 0.633 \quad \tilde{\lambda}_3 = 0.344$$

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{n - \mathcal{H}} [1 - H(x_j)]$$

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n H(x_j)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1 &= \frac{1}{3 - (0.997 + 0.913 + 0.953)} \times (1 - 0.997) \Rightarrow \\ &\tilde{\lambda}_1 = 7.299 \times 0.003 \Rightarrow \\ &\tilde{\lambda}_1 = 0.022 \end{aligned}$$

Άρα μεγαλύτερη πληροφορία παρέχουν τα κριτήρια x_2 και x_3 ενώ το πρώτο δεν παρέχει ουσιαστική πληροφορία στην ανάλυση.

Τέλος ενότητας