

**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών**  
**Τομέας Ηλ. Βιομηχανικών Διατάξεων & Συστημάτων Αποφάσεων**



## **Πολυκριτηριακά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων**

**E07 Η μέθοδος ELECTRE Tri**

**Χάρης Δούκας, Παναγιώτης Ξυδώνας & Γιάννης Ψαρράς**

## Περιεχόμενα διάλεξης

- i. Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής
- ii. Η μέθοδος ELECTRE Tri
- iii. Μέθοδοι στάθμισης κριτηρίων

# Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

- ✓ Η **θεωρία των σχέσεων υπεροχής** (outranking relations theory-ORT) εδράζει τη βάση της στη **θεωρία κοινωνικής επιλογής** (social choice theory) (Arrow and Raynaud, 1986).
- ✓ Σε αντίθεση με την **πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας** (multiattribute utility theory-MAUT), στόχος της ORT **δεν** είναι η ανάπτυξη μιας συνάρτησης βαθμολόγησης των εναλλακτικών δραστηριοτήτων, όπως η **συνάρτηση χρησιμότητας** (utility function), αλλά η ανάπτυξη ενός μεθοδολογικού πλαισίου που επιτρέπει την πραγματοποίηση **διμερών συγκρίσεων** (pairwise comparisons) μεταξύ αυτών.
- ✓ Η σχέση υπεροχής  **$S$**  είναι μια διμερής σχέση η οποία επιτρέπει την εκτίμηση της υπεροχής μιας εναλλακτικής δραστηριότητας  **$a$**  έναντι μιας άλλης εναλλακτικής δραστηριότητας  **$b$** . Η σχέση υπεροχής  **$S$**  ορίζεται στο σύνολο των εναλλακτικών δραστηριοτήτων και θα ισχύει:

**$a S b \leftrightarrow$**  «*Η εναλλακτική  $a$  είναι τουλάχιστον εξίσου καλή όσο η  $b$* »

## Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

- ✓ Η γενική ιδέα της σχέσης υπεροχής είναι ότι η σύγκριση δυο οποιονδήποτε εναλλακτικών  $a$  και  $b$  βασίζεται στην ισχύ των ενδείξεων που υποστηρίζουν τον ισχυρισμό «η εναλλακτική  $a$  είναι τουλάχιστον εξίσου καλή όσο η  $b$ » (θετικές ενδείξεις|συμφωνία κριτηρίων), καθώς και στην ισχύ των ενδείξεων, κατά του ισχυρισμού αυτού (αρνητικές ενδείξεις|ασυμφωνία κριτηρίων).
- ✓ Εφόσον η ισχύς των θετικών ενδείξεων είναι υψηλή και ταυτόχρονα η ισχύς των αρνητικών ενδείξεων είναι περιορισμένη, τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι τεκμαίρεται μια σχέση υπεροχής  $a S b$ , δηλαδή ότι «η εναλλακτική  $a$  είναι τουλάχιστον εξίσου καλή όσο η  $b$ ».
- ✓ Κύριο χαρακτηριστικό της σχέσης υπεροχής είναι ότι δεν είναι απαραίτητα μεταβατική (transitive) και δεν είναι απαραίτητα πλήρης (complete).

# Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

## Μεταβατικότητα

- ✓ Στην MAUT τα αποτελέσματα της αξιολόγησης των εναλλακτικών δραστηριοτήτων μέσω της συνάρτησης χρησιμότητας που αναπτύσσεται, υπακούουν στη μεταβατική ιδιότητα. Έτσι για οποιεσδήποτε τρεις εναλλακτικές  $a$ ,  $b$  και  $c$  δραστηριότητες ισχύουν:

$$\left. \begin{array}{l} U(g_a) > U(g_b) \Leftrightarrow a \succ b \\ U(g_b) > U(g_c) \Leftrightarrow b \succ c \end{array} \right\} U(g_a) > U(g_c) \Leftrightarrow a \succ c$$

$$\left. \begin{array}{l} U(g_a) = U(g_b) \Leftrightarrow a \approx b \\ U(g_b) = U(g_c) \Leftrightarrow b \approx c \end{array} \right\} U(g_a) = U(g_c) \Leftrightarrow a \approx c$$

- ✓ Αντίθετα, η ανάπτυξη των σχέσεων υπεροχής επιτρέπει τη μοντελοποίηση περιπτώσεων όπου, ενώ η εναλλακτική δραστηριότητα  $a$  προτιμάται|είναι αδιάφορη της  $b$ , η οποία με τη σειρά της προτιμάται|είναι αδιάφορη της  $c$ , τελικά δεν προτιμάται|δεν είναι αδιάφορη της  $c$ .
- ✓ Ανάδειξη της μη-μεταβατικής φύσης των προτιμήσεων (Luce, 1956).

# Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

## Πληρότητα

- ✓ Η ιδιότητα της πληρότητας αναφέρεται στην ύπαρξη της δυνατότητας πλήρους αξιολόγησης όλων των εναλλακτικών δραστηριοτήτων.
- ✓ Σε αντίθεση με την MAUT, στην ORT θεωρείται ότι μια πλήρης αξιολόγηση των εναλλακτικών δεν είναι πάντα εφικτή και για τον λόγο αυτό, πέραν των σχέσεων προτίμησης|αδιαφορίας, εισάγεται επιπλέον η σχέση της **ασυγκρισιμότητας** (incomparability).
- ✓ Η έννοια της μη πληρότητας είναι σημαντική, δεδομένου ότι σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις η πλήρης αξιολόγηση των εναλλακτικών δραστηριοτήτων δεν είναι ρεαλιστική (π.χ. όταν υπάρχουν εναλλακτικές με πολύ ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τα οποία τις καθιστούν μη συγκρίσιμες με άλλες εναλλακτικές).

# Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

- ✓ Όλες οι τεχνικές οι οποίες βασίζονται στην ORT λειτουργούν σε δύο στάδια:
  - ⇒ Στο πρώτο στάδιο πραγματοποιείται η **ανάπτυξη** της σχέσης υπεροχής  $S$  μεταξύ των εξεταζόμενων εναλλακτικών δραστηριοτήτων.
  - ⇒ Στο δεύτερο στάδιο πραγματοποιείται η **εκμετάλλευση** της σχέσης υπεροχής, ώστε να εξαχθεί το αποτέλεσμα της αξιολόγησης των εναλλακτικών δραστηριοτήτων υπό την επιθυμητή μορφή, δηλαδή:
    - **Ταξινόμηση** (classification)
    - **Κατάταξη** (ranking)
    - **Επιλογή** (choice)
    - **Περιγραφή** (description)

# Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

Σύνολο  
εναλλακτικών  
δραστηριοτήτων  
 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$

Επιλογή

$X_3$

Ταξινόμηση

Κατηγορία 1

$X_2, X_4, X_5$

Κατηγορία 2

$X_1, X_3, X_6$

Κατάταξη

1.  $X_3$
2.  $X_1$
3.  $X_5$
4.  $X_6$
5.  $X_4$
6.  $X_2$

Περιγραφή

Χαρακτηριστικά των  
εναλλακτικών  
δραστηριοτήτων



## Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

- ✓ Όπως και στην περίπτωση της MAUT, η ανάπτυξη της σχέσης υπεροχής βασίζεται στις πληροφορίες που παρέχει ο ίδιος ο αποφασίζων.
- ✓ Οι πληροφορίες αυτές διαφέρουν ανάλογα με τη συγκεκριμένη μέθοδο που χρησιμοποιείται, αλλά στην πλειοψηφία των περιπτώσεων αφορούν:
  - ⇒ Τα βάρη σημαντικότητας (weights) των κριτηρίων αξιολόγησης.
  - ⇒ Τα κατώφλια προτίμησης (preference thresholds).
  - ⇒ Τα κατώφλια αδιαφορίας (indifference thresholds).
  - ⇒ Τα κατώφλια βέτο (veto thresholds).
  - ⇒ Το κατώφλι αποκοπής (cut-off threshold).

## Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

- ✓ Στην ORT η χρήση των **κατωφλιών προτίμησης και αδιαφορίας** συμβάλλει τελικά στην ανάπτυξη μιας **ασαφούς σχέσης υπεροχής** (fuzzy outranking relation).
- ✓ Αντίστοιχα, η χρήση του **κατωφλίου βέτο** επιτρέπει την μοντελοποίηση περιπτώσεων όπου, η πολύ κακή επίδοση μιας εναλλακτικής δραστηριότητας ***a*** σε ένα κριτήριο, έναντι της αντίστοιχης επίδοσης μιας άλλης εναλλακτικής ***b***, θέτει βέτο στον ισχυρισμό:

*«Η εναλλακτική δραστηριότητα ***a*** είναι τουλάχιστον εξίσου καλή όσο η ***b***»*

ανεξαρτήτως των επιδόσεων των δύο εναλλακτικών στα υπόλοιπα κριτήρια.

# Η θεωρία των σχέσεων υπεροχής

$$g(a) = g(b) \Rightarrow a I_g b$$
$$g(a) > g(b) \Rightarrow a P_g b$$

$$|g(a) - g(b)| \leq q \Rightarrow a I_g b$$
$$q < g(a) - g(b) \leq p \Rightarrow a Q_g b$$
$$g(a) - g(b) > p \Rightarrow a P_g b$$

$a S b$

$b S a$

$a P b$

$a Q b$

$a I b$

$b Q a$

$b P a$

$g(a) - p$

$g(a) - q$

$g(a)$

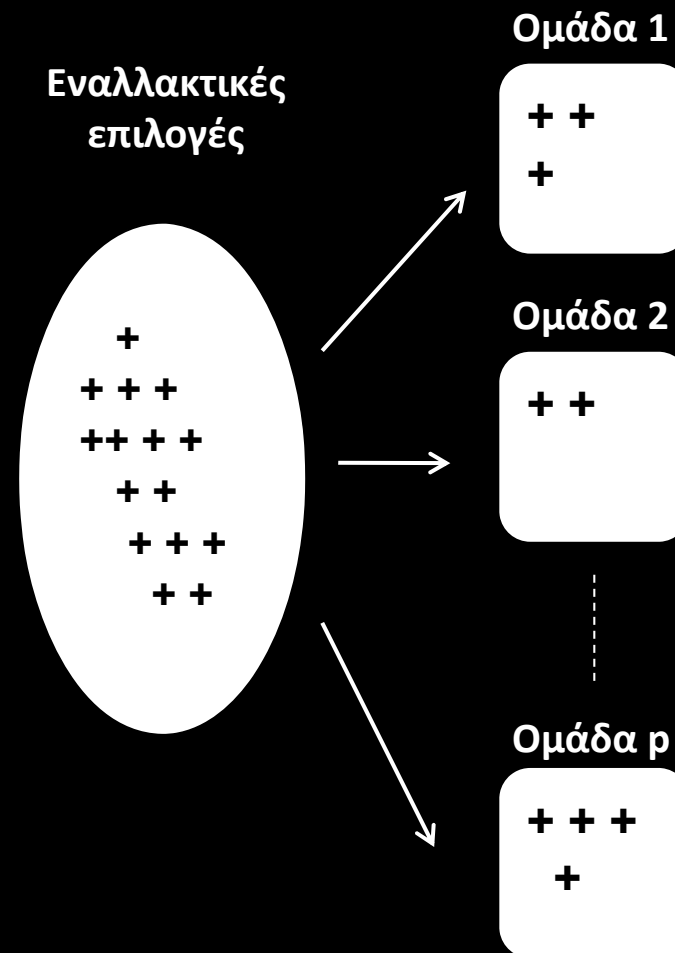
$g(a) + q$

$g(a) + p$

$g(b)$

# Η μέθοδος ELECTRE Tri

- ✓ Η μέθοδος **ELECTRE Tri** (Yu, 1992) χρησιμοποιείται σε προβλήματα ταξινόμησης όπου, οι εναλλακτικές επιλογές κατανέμονται σε προκαθορισμένες κατηγορίες.
- ✓ Κάθε επιλογή εξετάζεται ανεξάρτητα από τις άλλες, με βάση ένα σύνολο κριτηρίων και εντάσσεται σε κάποια από τις προκαθορισμένες κατηγορίες.
- ✓ Η ταξινόμηση μιας εναλλακτικής  $\alpha$  έρχεται σαν αποτέλεσμα της σύγκρισής της με τα **πρότυπα αναφοράς** (reference profiles), τα οποία καθορίζουν τα όρια των δυνατών κατηγοριών.

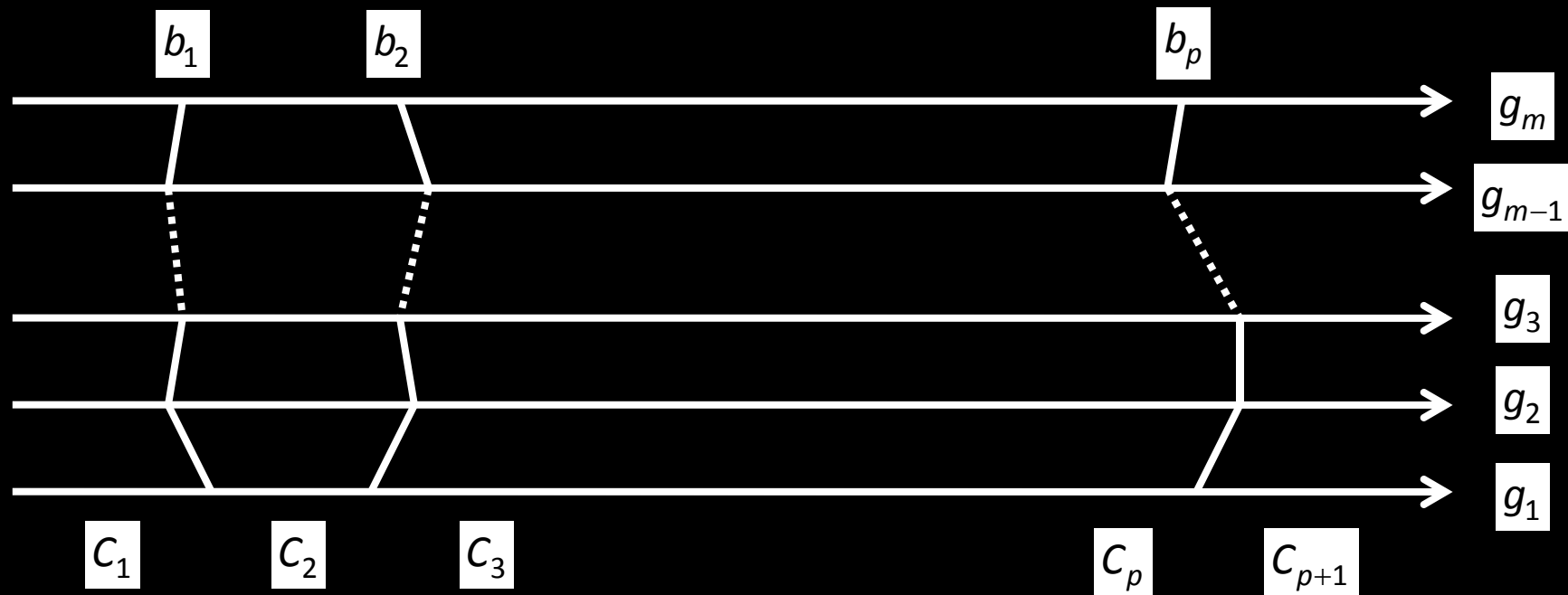


# Η μέθοδος ELETCRE Tri

Αν  $F = (1, 2, \dots, m)$  το σύνολο δεικτών των κριτηρίων  $g_1, g_2, \dots, g_m$

Αν  $B = (1, 2, \dots, p)$  το σύνολο δεικτών των προτύπων αναφοράς  $b_1, b_2, \dots, b_p$

Τότε, ορίζονται  $p + 1$  κατηγορίες ταξινόμησης, όπου  $b_h$  το άνω όριο της κατηγορίας  $C_h$  και το κάτω όριο της κατηγορίας  $C_{h+1}$  ( $h = 1, 2, \dots, p$ ).



## Η μέθοδος ELECTRE Tri

- ✓ Ο τρόπος με τον οποίο στη μέθοδο **ELECTRE Tri** κατασκευάζεται η σχέση υπεροχής, ώστε να ενεργοποιήσει τη σύγκριση μιας εναλλακτικής  $\alpha$  με ένα πρότυπο αναφοράς  $b_h$ , συνίσταται στα ακόλουθα βήματα:
  - ⊖ Έλεγχος συμφωνίας
  - ⊖ Έλεγχος ασυμφωνίας
  - ⊖ Έλεγχος αξιοπιστίας

# Η μέθοδος ELETCRE Tri

## Έλεγχος συμφωνίας

- ✓ Ο έλεγχος συμφωνίας βασίζεται στην αξιολόγηση της ισχύος της πρότασης:

*«Η εναλλακτική επιλογή  $a$  είναι τουλάχιστον εξίσου καλή,  
όσο το πρότυπο αναφοράς  $b_h$ ».*

- ✓ Η αξιολόγηση της ισχύος αυτής της πρότασης πραγματοποιείται μέσω του υπολογισμού του **ολικού δείκτη συμφωνίας** (overall concordance index)  $c(a, b_h)$  (οι τιμές του οποίου κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1), καθώς και του **μερικού δείκτη συμφωνίας**  $c_j(a, b_h)$  (partial concordance index).

$$c(a, b_h) = \frac{\sum_{j \in F} k_j c_j(a, b_h)}{\sum_{j \in F} k_j}$$

Έλεγχος συμφωνίας

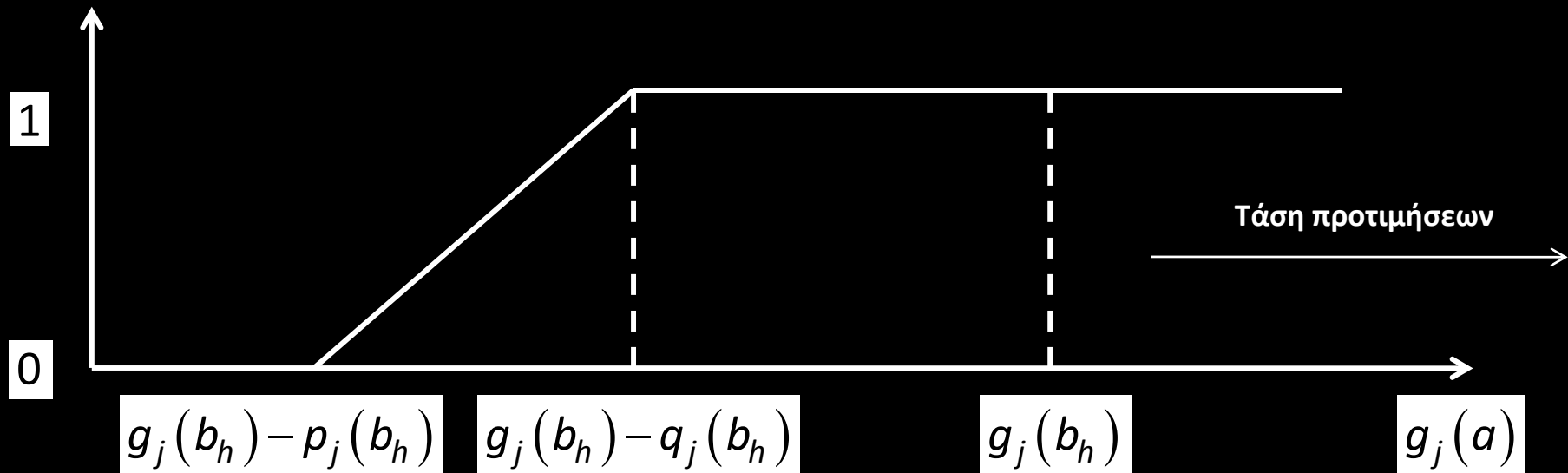
## Η μέθοδος ELETCRE Tri

Εαν  $g_j(a) \leq g_j(b_h) - p_j(b_h)$ , τότε  $c_j(a, b_h) = 0$ .

Εαν  $g_j(b_h) - p_j(b_h) < g_j(a) \leq g_j(b_h) - q_j(b_h)$ ,  
τότε  $c_j(a, b_h) = \frac{g_j(a) - g_j(b_h) + p_j(b_h)}{p_j(b_h) - q_j(b_h)}$ .

$c_j(a, b_h)$

Εαν  $g_j(b_h) - q_j(b_h) < g_j(a)$ , τότε  $c_j(a, b_h) = 1$ .





# Η μέθοδος ELETCRE Tri

## Έλεγχος ασυμφωνίας

- ✓ Σε αντίθεση με το δείκτη μερικής συμφωνίας, ο **δείκτης μερικής ασυμφωνίας** (partial discordance index)  $d_j(a, b_h)$  εκφράζει το βαθμό των ενδείξεων κατά της ισχύος της πρότασης:

*«Η εναλλακτική επιλογή  $a$  είναι τουλάχιστον εξίσου καλή, όσο το πρότυπο αναφοράς  $b_h$  με βάση το κριτήριο  $g_j$ ».*

- ✓ Ο υπολογισμός του δείκτη ασυμφωνίας βασίζεται στον καθορισμό του κατωφλιού βέτο  $v_j(b_h)$ .
- ✓ Το κατώφλι βέτο αναπαριστά την ελάχιστη διαφορά μεταξύ του προτύπου  $b_h$  και των επιδόσεων μιας επιλογής, πάνω από την οποία τίθεται άρνηση στην προτίμηση της επιλογής αυτής, έναντι του προτύπου (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα της σύγκρισης της επιλογής αυτής με το πρότυπο στα υπόλοιπα κριτήρια).

Έλεγχος ασυμφωνίας

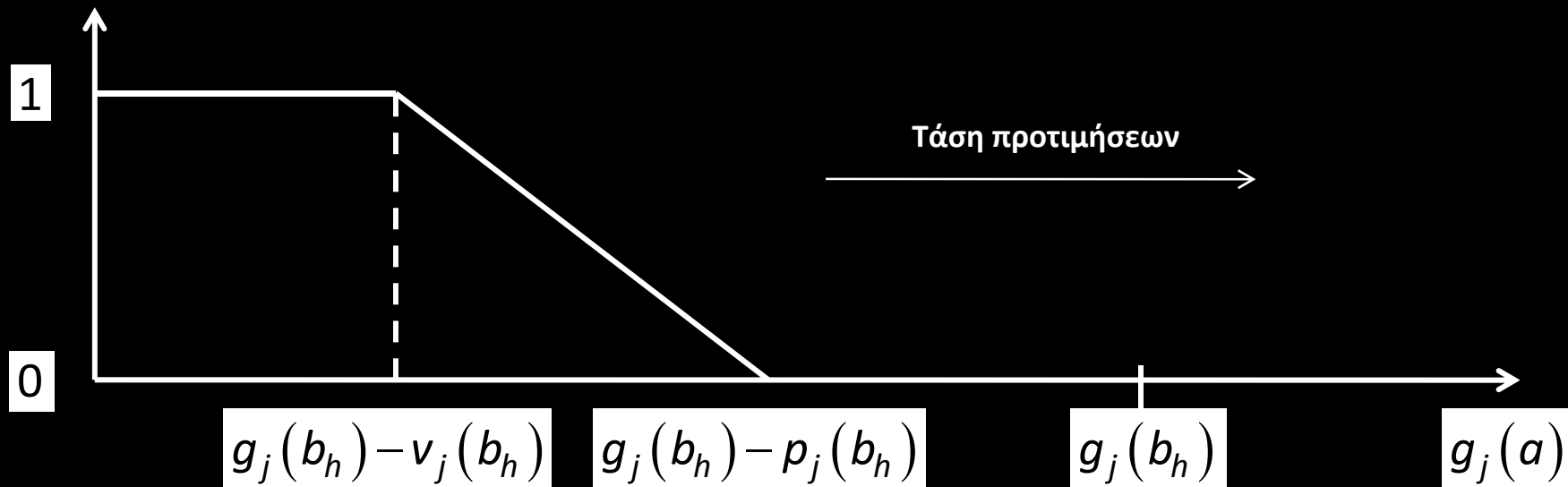
## Η μέθοδος ELETCRE Tri

Εαν  $g_j(a) > g_j(b_h) - p_j(b_h)$ , τότε  $d_j(a, b_h) = 0$ .

Εαν  $g_j(b_h) - v_j(b_h) < g_j(a) \leq g_j(b_h) - p_j(b_h)$ ,  
τότε  $d_j(a, b_h) = \frac{g_j(b_h) - g_j(a) - p_j(b_h)}{v_j(b_h) - q_j(b_h)}$ .

$d_j(a, b_h)$

Εαν  $g_j(b_h) - v_j(b_h) \geq g_j(a)$ , τότε  $d_j(a, b_h) = 1$ .



# Η μέθοδος ELETCRE Tri

## Έλεγχος αξιοπιστίας

- ✓ Ο έλεγχος αξιοπιστίας πραγματοποιείται μέσω του υπολογισμού του δείκτη αξιοπιστίας (credibility index)  $\sigma(a, b_h)$ .

$$\sigma(a, b_h) = c(a, b_h) \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - d_j(a, b_h)}{1 - c(a, b_h)},$$

όπου  $\bar{F} = \{j \in F \mid d_j(a, b_h) > c(a, b_h)\}$

- ✓ Η μετατροπή της αποκτώμενης ασαφούς σχέσης υπεροχής σε μια **συμπαγή σχέση υπεροχής** (crisp outranking relation)  $S$ , γίνεται μέσω του κατωφλίου αποκοπής  $\lambda$ .
- ✓ Το  $\lambda$  εκτιμάται ως η μικρότερη τιμή του δείκτη αξιοπιστίας, συμβατού με την υπόθεση ότι η εναλλακτική  $a$  υπερέχει του προτύπου  $b_h$ , δηλαδή:

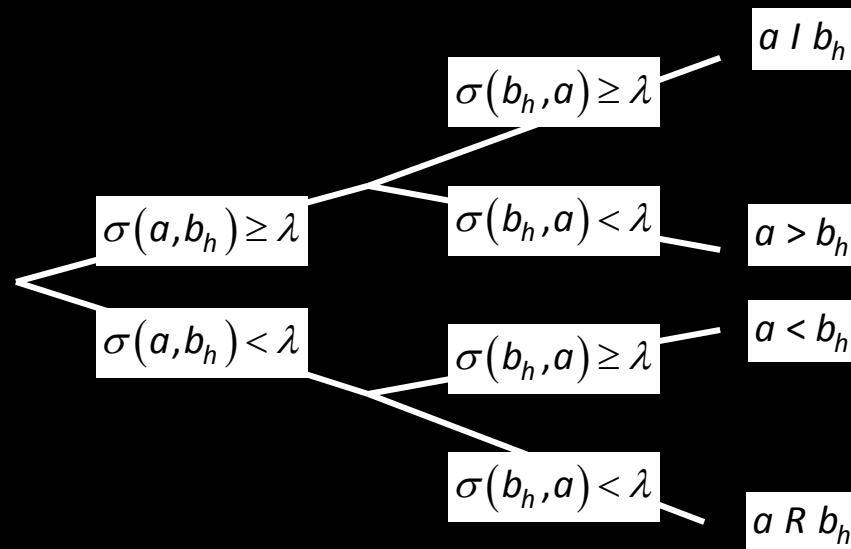
$$\sigma(a, b_h) \geq \lambda \Leftrightarrow a S b_h$$

# Η μέθοδος ELETCRE Tri

## Εξαγωγή αποτελεσμάτων

- ✓ Με βάση τα προηγούμενα εξάγονται οι ακόλουθες δυαδικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} a I b_h &\Leftrightarrow a S b_h \text{ και } b_h S a \\ a > b_h &\Leftrightarrow a S b_h \text{ και όχι } b_h S a \\ a < b_h &\Leftrightarrow \text{όχι } a S b_h \text{ και } b_h S a \\ a R b_h &\Leftrightarrow \text{όχι } a S b_h \text{ και όχι } b_h S a \end{aligned}$$



# Η μέθοδος ELECTRE Tri

## Διαδικασίες ταξινόμησης ή ανάθεσης (assignment procedures)

- ✓ Η μέθοδος ELECTRE Tri παρέχει δύο διαδικασίες ταξινόμησης: α) την **απαισιόδοξη** (pessimistic assignment), και β) την **αισιόδοξη** (optimistic assignment).
  - ⇒ Η απαισιόδοξη προσέγγιση χρησιμοποιείται όταν απαιτείται εφαρμογή μιας συντηρητικής πολιτικής ή όταν οι διαθέσιμοι πόροι είναι περιορισμένοι.
    - i. Σύγκρινε την εναλλακτική επιλογή  $a$  διαδοχικά με τα πρότυπα αναφοράς  $b_i$ , όπου  $i = p, p-1, \dots, 0$ .
    - ii. Αν το  $b_h$  είναι το πρώτο πρότυπο αναφοράς τέτοιο ώστε  $a S b_h$ , τοποθέτησε την εναλλακτική  $a$  στην ομάδα  $C_{h+1}$  ( $a \rightarrow C_{h+1}$ ).
  - ⇒ Η αισιόδοξη προσέγγιση χρησιμοποιείται σε προβλήματα όπου ο αποφασίζων επιθυμεί να δώσει ένα συγκριτικό πλεονέκτημα σε κάποιες εναλλακτικές που παρουσιάζουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον.
    - i. Σύγκρινε την εναλλακτική επιλογή  $a$  διαδοχικά με τα πρότυπα αναφοράς  $b_i$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, p+1$ .
    - ii. Αν το  $b_h$  είναι το πρώτο πρότυπο αναφοράς τέτοιο ώστε  $b_h S a$ , τοποθέτησε την εναλλακτική  $a$  στην ομάδα  $C_h$  ( $a \rightarrow C_h$ ).

## Μέθοδοι στάθμισης κριτηρίων

- ✓ Με βάση τους Rogers et al. (2000), οι κυριότερες μέθοδοι στάθμισης κριτηρίων αναφορικά στην οικογένεια μεθόδων ELECTRE είναι οι εξής:
  - ⇒ Το σύστημα απευθείας στάθμισης (direct weighting system) (Hokkanen and Salminen, 1997),
  - ⇒ Το σύστημα Mousseau (Mousseau, 1995),
  - ⇒ Η τεχνική των καρτών (pack of cards technique) (Simos, 1990), και
  - ⇒ Η μέθοδος του πλέγματος αντίστασης στην αλλαγή (resistance to change grid method) (Rogers and Bruen, 1998).

## Μέθοδοι στάθμισης κριτηρίων

- ✓ Η πλέον διαδεδομένη μέθοδος στάθμιση των κριτηρίων, είναι η **μέθοδος του πλέγματος αντίστασης στην αλλαγή**. Τα πλεονεκτήματα αυτής είναι τα εξής:
  - ⇒ Είναι σχετικά απλή και εύκολα καταληπτή από τους εμπλεκόμενους στη διαδικασία της απόφασης.
  - ⇒ Εδράζει τη βάση της στην ανθρώπινη ψυχολογία και στον τρόπο με τον οποίο το άτομο διατυπώνει τις προτιμήσεις του.
  - ⇒ Τα βάρη που προκύπτουν συνδέονται και αντανακλούν ευθέως στη σημαντικότητα που αντιλαμβάνεται ο αποφασίζων για κάθε κριτήριο.
  - ⇒ Έχει εφαρμοστεί σε πλήθος πραγματικών εφαρμογών.

# Μέθοδοι στάθμισης κριτηρίων

Η μέθοδος του πλέγματος αντίστασης στην αλλαγή

|            | $g_{1.1}$ | $g_{1.2}$ | $g_{1.3}$ | $g_{1.4}$ | $g_{1.5}$ | $g_{1.6}$ | $g_{1.7}$ | $g_{1.8}$ | $g_{1.9}$ | $g_{1.10}$ | $g_{1.11}$ | $g_{1.12}$ | Κεν | Χ | Συν | Βάρη % |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|-----|---|-----|--------|
| $g_{1.1}$  |           | X         | X         | X         |           |           |           |           |           |            |            |            | 8   | 0 | 8   | 13.11  |
| $g_{1.2}$  |           |           | X         |           |           |           |           |           |           |            |            |            | 9   | 1 | 10  | 16.39  |
| $g_{1.3}$  |           |           |           |           |           |           |           |           |           |            |            |            | 9   | 2 | 11  | 18.03  |
| $g_{1.4}$  |           |           |           |           |           |           |           |           |           |            |            |            | 8   | 1 | 9   | 14.75  |
| $g_{1.5}$  |           |           |           |           |           | X         | X         | X         | I         |            | X          | X          | 1   | 0 | 1   | 1.64   |
| $g_{1.6}$  |           |           |           |           |           |           |           | I         |           |            | I          |            | 4   | 1 | 5   | 8.20   |
| $g_{1.7}$  |           |           |           |           |           |           |           | X         |           |            | X          | I          | 2   | 1 | 3   | 4.92   |
| $g_{1.8}$  |           |           |           |           |           |           |           |           |           |            | I          |            | 3   | 2 | 5   | 8.20   |
| $g_{1.9}$  |           |           |           |           |           |           |           |           |           |            | X          | X          | 1   | 0 | 1   | 1.64   |
| $g_{1.10}$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |            | X          |            | 1   | 0 | 1   | 1.64   |
| $g_{1.11}$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |            |            |            | 1   | 4 | 5   | 8.20   |
| $g_{1.12}$ |           |           |           |           |           |           |           |           |           |            |            |            | 0   | 2 | 2   | 3.28   |



**Τέλος ενότητας**