

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## Η μέθοδος PROMETHEE

### Εισαγωγή

Οι μέθοδοι πολυκριτήριας ανάλυσης Preference Ranking Optimization METHod for Enrichment Evaluation (PROMETHEE) των Brans, Mareschal and Vincke (1986), ανήκουν στην οικογένεια των μεθόδων υπεροχής αλλά λόγω της απουσίας βέτο, παραμένουν έξω από τη λογική των μη αντισταθμιστικών μεθόδων τύπου ELECTRE.

Οι μέθοδοι υπεροχής, η θεωρία των οποίων αναπτύχθηκε από τον Roy (1968, 1991, 1996), αναπτύσσουν ένα μεθοδολογικό πλαίσιο που επιτρέπει την πραγματοποίηση διμερών συγκρίσεων μεταξύ των εναλλακτικών. Οι PROMETHEE I και II χαρακτηρίζονται ως μέθοδοι διμερούς σύγκρισης των εναλλακτικών.

Η σχέση υπεροχής συμβολίζεται με το γράμμα  $S$  και εκφράζουμε ότι μία δράση  $a$  είναι τουλάχιστον εξίσου καλή με τη  $b$  με την σχέση:

$$aSb, \forall (a,b) \in A$$

όπου  $A$  το σύνολο δράσεων.

Η σχέση υπεροχής εμπεριέχει τη σχέση της ισχυρής προτίμησης ( $P$ ), τη σχέση της ασθενούς προτίμησης ( $Q$ ) και την σχέση αδιαφορίας ( $I$ ). Ο ισχυρισμός αυτός εκφράζεται και με την παρακάτω σχέση:

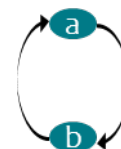
$$S=P \cup Q \cup I$$

Για τις σχέσεις αυτές ισχύουν τα παρακάτω:

«Η  $a$  προτιμάται από τη  $b$ »:  $aPb \Leftrightarrow aSb$  και  $b\$a$



«Η  $a$  είναι αδιάφορη της  $b$ »:  $aIb \Leftrightarrow aSb$  και  $bSa$



«Η  $a$  δεν συγκρίνεται με τη  $b$ »:  $aRb \Leftrightarrow a\$b$  και  $b\$a$



Λέμε επίσης ότι η  $a$  κυριαρχεί  $b$  όταν η  $a$  έχει τουλάχιστον καλύτερες αξιολογήσεις από την  $b$  και ότι η  $a$  υπερέχει της  $b$  όταν η  $a$  έχει τουλάχιστον καλύτερες

αξιολογήσεις από την  $b$  στην πλειοψηφία των κριτηρίων και στα κριτήρια που υπερέρχει η  $b$  οι διαφορές είναι μικρές.

Οι μέθοδοι PROMETHEE I και II θεωρούνται αρκετά δημοφιλείς καθώς η διαδικασία για την επίλυση ενός πολυκριτηρίου προβλήματος μέσω αυτών, καθίσταται προσιτή ως προς την αντίληψη και την εφαρμογή.

Τρεις βασικές αρχές που ξεχωρίζουν τις μεθόδους PROMETHEE σε σχέση με άλλες της ίδιας κατηγορίας (ELECTRE) είναι:

α) επέκταση στην έννοια των κριτηρίων, (προτείνονται νέες νέες συναρτήσεις κριτηρίων, όπως κριτήριο τελείως αυστηρό (αυστηρή προτίμηση), κριτήριο αυστηρό αλλά με περιοχή αδιαφορίας, κριτήριο με γραμμική προτίμηση κ.α.)

β) εκτιμώμενη σχέση υπεροχής (είναι λιγότερο ευαίσθητη σε μικρές τροποποιήσεις και κατά συνέπεια, είναι εύκολη η ερμηνεία της) και

γ) εκμετάλλευση της σχέσης υπεροχής (όταν οι εναλλακτικές λύσεις πρέπει να ταξινομηθούν από την καλύτερη προς τη χειρότερη).

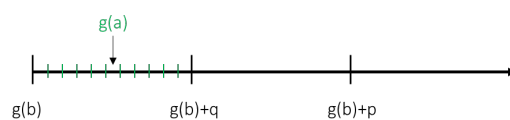
### Κατώφλια

Στις μεθόδους PROMETHEE δίνεται η δυνατότητα χρήσης «ψευδοκριτηρίων» μέσω της αξιοποίησης του κατωφλιού αδιαφορίας ( $q$ ), προτίμησης ( $p$ ) και μέσω του ενδιαμέσου κατωφλιού μεταξύ  $q$  και  $p$  ( $s$ ). Τα κριτήρια αξιολόγησης ενός προβλήματος προτείνεται να μοντελοποιηθούν ως ψευδοκριτήρια, σε περιπτώσεις που δεν είμαστε σίγουροι για τις τιμές τους (πχ. αποτελέσματα δημοσκοπήσεων), με σκοπό τον περιορισμό των λανθασμένων συμπερασμάτων.

Έστω  $g$  μια συνάρτηση κριτηρίου και  $g(a) \geq g(b)$ :

$$g(b) \leq g(a) \leq g(b) + q[g(b)] \Leftrightarrow$$

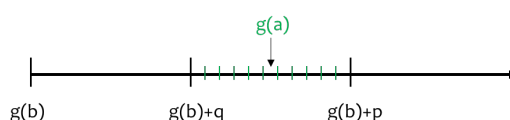
$$\Leftrightarrow a|b$$



Ζώνη αδιαφορίας

$$g(b) + q[g(b)] < g(a) < g(b) \Leftrightarrow$$

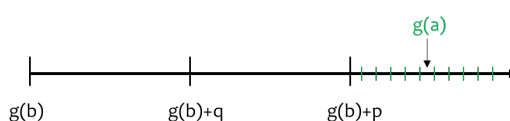
$$\Leftrightarrow aQb$$



Ζώνη ασθενούς προτίμησης

$$g(a) > g(b) + p[g(b)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow aPb$$



Ζώνη ισχυρής προτίμησης

### Μεθοδολογικό πλαίσιο

Η μέθοδος PROMETHEE περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

#### 1. Υπολογισμός βαρών κριτηρίων

Για τον υπολογισμό των βαρών υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: i) είτε λαμβάνουμε τις τιμές έτοιμες από τον αποφασίζοντα ii) είτε θέτουμε όλα τα βάρη ίσα μεταξύ τους iii) είτε επιλέγουμε μια μέθοδο για υπολογισμό και απόδοση βαρύτητας στα κριτήρια.

Για τα βάρη ισχύει πάντα ο περιορισμός:

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1 \tag{1}$$

όπου  $w_j$  το βάρος του  $j$ -οστού κριτηρίου.

**2. Υπολογισμός συνάρτησης προτίμησης**

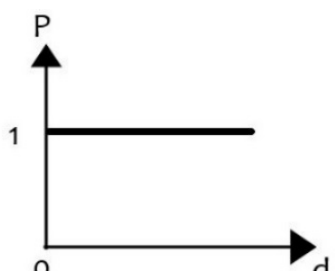
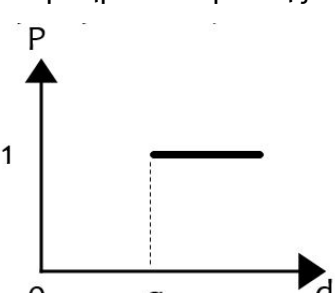
Η PROMETHEE χρησιμοποιεί την έννοια του γενικευμένου κριτηρίου με σκοπό την μοντελοποίηση την αξία που αποδίδει ο αποφασίζοντας στο εύρος της διαφοράς  $g_j(a)-g_j(b)$ , στο κριτήριο  $j$  για το ζεύγος δράσεων  $(a,b)$ . Αυτό γίνεται μέσω της συνάρτησης προτίμησης:

$$P_j(a,b)=F_j[d_j(a,b)] \forall (a,b) \in A \tag{2}$$

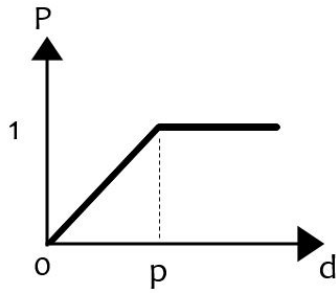
Όπου:

- $d_j(a,b)=g_j(a)-g_j(b)$
  - $0 \leq P_j(a,b) \leq 1$
  - $P_j(a,b)=0$ , όταν  $g_j(a)-g_j(b) \leq 0$
- Στην περίπτωση όπου  $g_j(a)-g_j(b) > 0 \rightarrow$ επιλογή συνάρτησης

Για τον σαφή καθορισμό της μορφής της συνάρτησης προτίμησης, χρησιμοποιούνται έξι γενικευμένα κριτήρια, τα οποία καλύπτουν στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις τον τρόπο με τον οποίο εκφράζει τις προτιμήσεις του ο αποφασίζων.

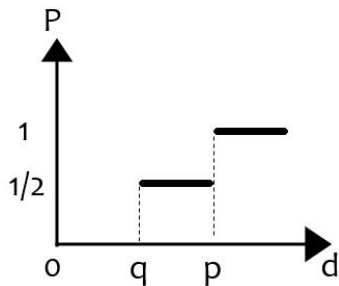
Γενικευμένο Κριτήριο	Συνάρτηση Προτίμησης	Απαραίτητες παράμετροι
1. Κοινό κριτήριο (Usual)	 $P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ 1, & d > 0 \end{cases}$	
2. Κριτήριο U-καμπύλης	 $P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ 1, & d > q \end{cases}$	q

3. Κριτήριο V-καμπύλης (V-shape)



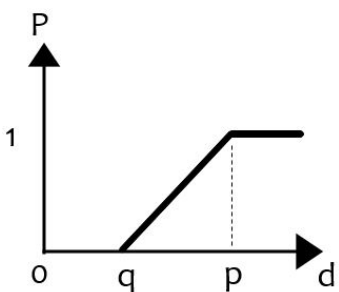
$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ \frac{d}{p}, & 0 \leq d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases} \quad p$$

4. Κριτήριο επιπέδων (level)



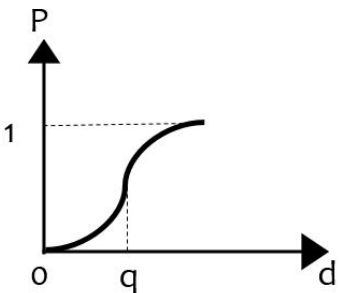
$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{1}{2}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases} \quad p, q$$

5. Κριτήριο V-καμπύλης με κατώφλι αδιαφορίας (Linear)



$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq q \\ \frac{d-q}{p-q}, & q < d \leq p \\ 1, & d > p \end{cases} \quad p, q$$

6. Κριτήριο Gauss



$$P(d) = \begin{cases} 0, & d \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d^2}{2s^2}}, & d > 0 \end{cases} \quad s$$

### 3. Υπολογισμός του πολυκριτήριου δείκτη προτίμησης

Ο δείκτης αυτός εκφράζει τον βαθμό ολικής προτίμησης της  $a$  έναντι της  $b$ . Για κάθε ζεύγος δράσεων  $(a,b)$  ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$(a, b) = \sum_{j=1}^n w_j P_j(a, b) \quad (3)$$

Όπου :  $w_j$ : Βάρος  $j$ -οστού κριτηρίου και

$P_j(a,b)$ : Αποτέλεσμα συνάρτησης προτίμησης για το  $j$ -οστό κριτήριο μεταξύ των δράσεων  $a, b$

### 4. Υπολογισμός ροών υπεροχής

Για  $n$  εναλλακτικές:

- **Θετική ροή (positive outranking flow)**

Ή αλλιώς η ροή εξόδου, δείχνει την υπεροχή της εναλλακτικής  $a$  ως προς όλες τις υπόλοιπες μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$\varphi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(a, x) \quad (4)$$

- **Αρνητική ροή (negative outranking flow)**

Ή αλλιώς η ροή εισόδου, δείχνει την υπεροχή όλων των υπόλοιπων εναλλακτικών έναντι της  $a$  μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$\varphi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{x \in A} \pi(x, a) \quad (5)$$

- **Καθαρή ροή (net outranking flow)**

Αποτελεί ένα συνολικό μέγεθος αξιολόγησης της εναλλακτικής  $a$  έναντι όλων των υπολοίπων και εκφράζεται μέσω της παρακάτω σχέσης:

$$\varphi(a) = \varphi(a)^+ - \varphi(a)^- \quad (6)$$

### 5. Κατάταξη

- Μερική κατάταξη των δράσεων μέσω PROMETHEE I
  - Πλήρης κατάταξη ( $Z1$ ) ως προς τις θετικές ροές (όσο μεγαλύτερη τόσο πιο ψηλά στην κατάταξη)
  - Πλήρης κατάταξη ( $Z2$ ) ως προς τις αρνητικές ροές (όσο μικρότερη τόσο πιο ψηλά στην κατάταξη)
- Πλήρης κατάταξη των δράσεων μέσω PROMETHEE II
  - Πλήρης κατάταξη ( $Z=Z1 \cap Z2$ ) ως προς τις καθαρές ροές (όσο μεγαλύτερη τόσο πιο ψηλά στην κατάταξη)

## Βιβλιογραφία

- Brans, J. P. (1982). L'ingénierie de la décision: l'élaboration d'instruments d'aide a la décision. Université Laval, Faculté des sciences de l'administration.
- Brans, J. P., & Mareschal, B. (2002). Prométhée-Gaia: une méthodologie d'aide à la décision en présence de critères multiples. Bruxelles: Éditions de l'Université de Bruxelles.
- Brans, J. P., Vincke, P., & Mareschal, B. (1986). How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. European journal of operational research, 24(2), 228-238.
- Mareschal, B., Brans, J. P., & Vincke, P. (1984). PROMETHEE: A new family of outranking methods in multicriteria analysis (No. 2013/9305). ULB--Universite Libre de Bruxelles.
- Roy, B. (1990). The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. In Readings in multiple criteria decision aid (pp. 155-183). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Σίσκος, Ι., Μοντέλα Αποφάσεων - Μεθοδολογία Επιχειρησιακής Έρευνας, Θεωρία Πολυκριτήριας Ανάλυσης, Εφαρμογές σε Επιχειρήσεις και Οργανισμούς, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα, 2008