ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Μαθηματική τεχνική για αντιμετώπιση προβλημάτων λήψης πολυσταδιακών αποφάσεων
- Συστηματική διαδικασία εύρεσης εκείνου του συνδυασμού αποφάσεων που βελτιστοποιεί τη συνολική απόδοση (σύμφωνα με κάποιο κριτήριο)
- Πολυσταδιακές αποφάσεις: Ακολουθία αποφάσεων που σχετίζονται μεταξύ τους

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Προγραμματισμός Παραγωγής
- Προγραμματισμός Επενδύσεων
- Προβλήματα Διατήρησης Αποθεμάτων
- Προβλήματα Αντικατάστασης – Συντήρησης Εξοπλισμού
- Προβλήματα Βέλτιστης Διαδρομής

Γενικότερα ο Δ.Π. Χρησιμοποιείται όταν:

- δεν μπορεί να διαμορφωθεί μαθηματικό μοντέλο
- το μαθηματικό μοντέλο είναι σύνθετο και δεν μπορεί να λυθεί με αναλυτικές μεθόδους

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΟΛΥΣΤΑΔΙΑΚΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ

Παράδειγμα: Προγραμματισμός Παραγωγής

Σε μια παραγωγική μονάδα λαμβάνονται κατά τακτά χρονικά διαστήματα αποφάσεις για:

- τη στάθμη απασχόλησης του προσωπικού
- τη στάθμη απασχόλησης των μηχανημάτων
- την αποθεματική πολιτική
- τις προσλήψεις – απολύσεις τυχόν έκτακτου προσωπικού

Κάθε τέτοια χρονική περίοδος αποτελεί και ένα στάδιο

Στην αρχή κάθε περιόδου το σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση που περιγράφεται με:

- το ύψος της παραγωγής
- το ύψος των αποθεμάτων
- τον αριθμό των εργαζόμενων

Μετά από μια απόφαση το σύστημα μεταβαίνει σε μια διαφορετική κατάσταση.

Προγραμματισμός Επενδύσεων

- Μια επιχείρηση θέλει να καταστρώσει επενδυτικό πλάνο για τα επόμενα 5 χρόνια
- Το ύψος των διαθέσιμων πόρων (κατάσταση) είναι ορισμένο
- Στην αρχή κάθε χρονιάς λαμβάνονται αποφάσεις για τις επενδύσεις εκείνης της χρονιάς
- Ζητείται να μεγιστοποιηθεί η απόδοση του συνόλου των επενδύσεων

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ (1)

1. <u>ΣΤΑΔΙΑ</u>

   Το πρόβλημα χωρίζεται σε διαδοχικά στάδια

2. <u>ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ</u>

   Κάθε στάδιο έχει ένα αριθμό καταστάσεων που συνδέονται μ' αυτό. Καθορίζονται με τις τιμές μιας μεταβλητής

3. <u>ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ</u>

   Έχουν σαν αποτέλεσμα τη «μεταφορά» του συστήματος από την παρούσα κατάσταση σε μια άλλη στο επόμενο στάδιο

4. <u>ΙΔΙΟΤΗΤΑ MARKOV</u>

   Όταν δίνεται η κατάσταση του συστήματος σε κάποιο στάδιο, η βέλτιστη πολιτική για τα επόμενα στάδια είναι ανεξάρτητη από την πολιτική που ακολουθήθηκε στα προηγούμενα στάδια

   * Σύστημα χωρίς μνήμη

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ (2)

Σκοπός του προγραμματισμού είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους που σχετίζεται με τις αποφάσεις, για μια μεγάλη χρονική περίοδο.

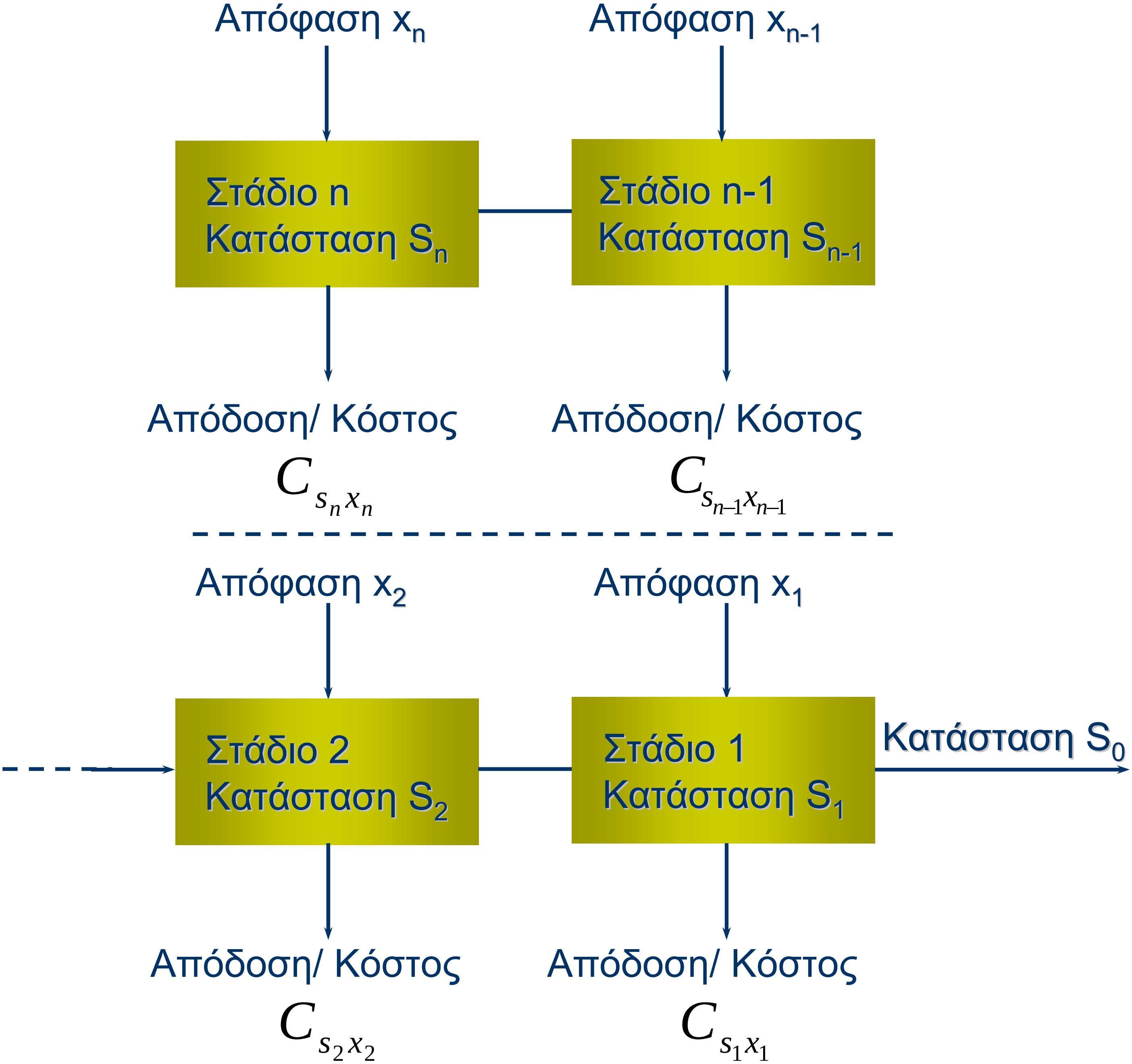
Άρα

- Στάδια
- Αποφάσεις
- Καταστάσεις του συστήματος
- Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

ΠΟΛΥΣΤΑΔΙΑΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ



$$F_n(s_n, x_n) = C_{s_n x_n} + F^*_{n-1}(s_n, x_n)$$

$$F^*_n(s_n) = \max_{x_n} / \min_{x_n} \{F_n(s_n, x_n)\}$$

Εύρεση της βέλτιστης πολιτικής για κάθε δυνατή κατάσταση του τελευταίου σταδίου

Ορισμός αναδρομικής σχέσης που καθορίζει τη βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση όταν απομένουν ακόμα n στάδια, με δεδομένη τη βέλτιστη πολιτική για κάθε κατάσταση όταν απομένουν n-1 στάδια

$$F_n(S_n, X_n) = C_{s_n x_n} + F^*_{n-1}(S_n, X_n)$$

$$F^*_n(S_n) = \max_{X_n} / \min_{x_n} \{F_n(S_n, X_n)\}$$

F_n: συνάρτηση βελτιστοποίησης

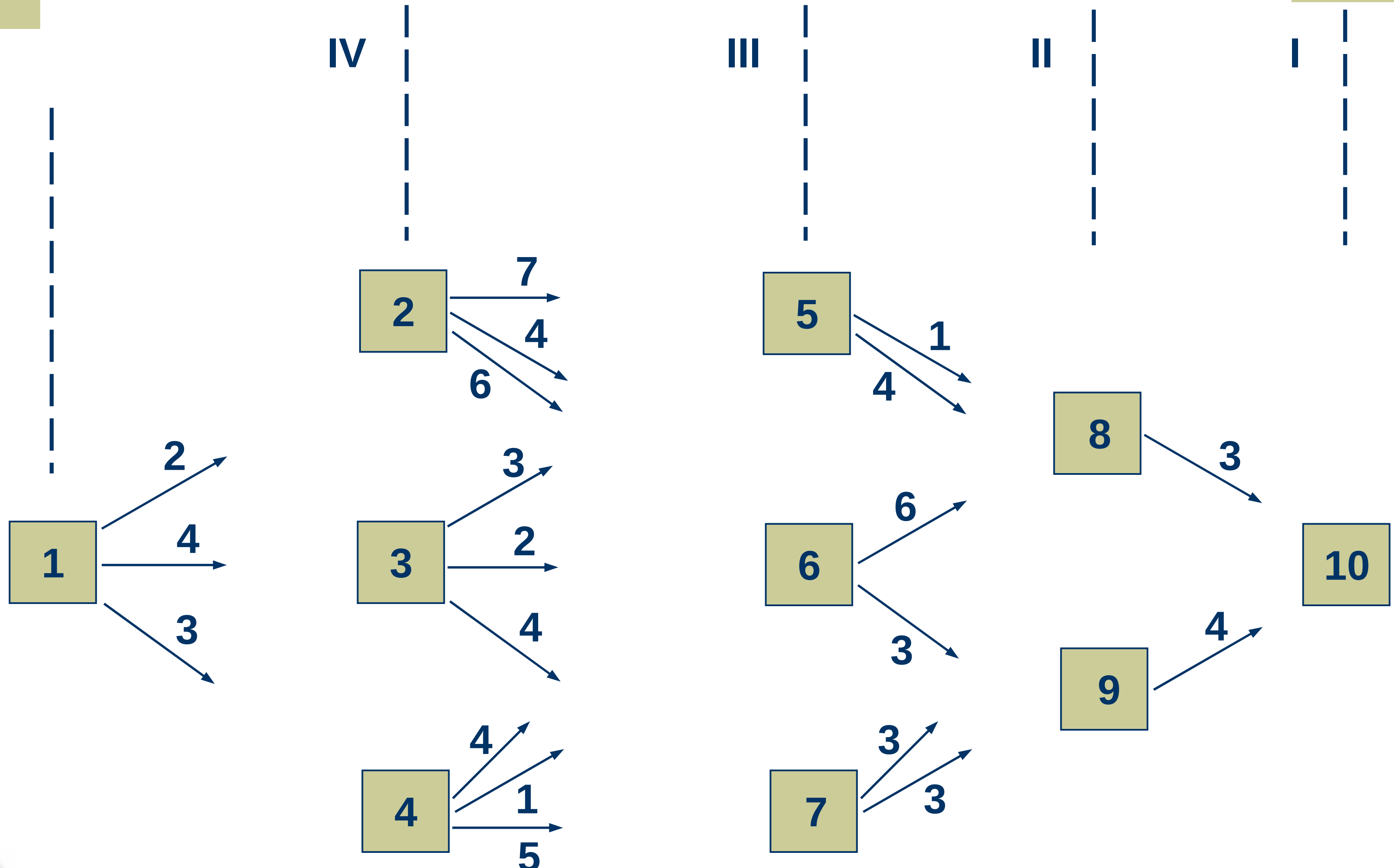
S_n: μεταβλητή κατάστασης

X_n: μεταβλητή απόφασης

Με τη χρήση της αναδρομικής σχέσης προχωράμε από το τέλος προς την αρχή

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (1)



ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (2)

- Στάδια: n = 1, 2, 3, 4

- Μεταβλητή απόφασης: x_n, ο αμέσως επόμενος προορισμός

- Μεταβλητή κατάστασης: S_n, η πολιτεία στην οποία βρίσκεται ο έμπορος

- Αναδρομική σχέση:

$$F_n(S_n, X_n) = C_{s_n x_n} + F^*_{n-1}(x_n)$$

$$F^*_n(S_n) = \min_{x_n} \{F_n(S_n, x_n)\}$$

C_{s_n, x_n} : το κόστος ασφάλισης για τη διαδρομή $s_n \rightarrow x_n$

** Το συνολικό κόστος ασφάλισης για τα τελευταία n στάδια θα ισούται με το κόστος της βέλτιστης πολιτικής για τα τελευταία n-1 στάδια (F^*_{n-1}) συν το κόστος της διαδρομής $x_n \rightarrow s_n$

Σχέση μεταξύ S_n και x_n: Ο προορισμός του σταδίου n είναι αφετηρία του σταδίου n-1

$$x_n = S_{n-1}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (3)

n=1

S_1	8	9
$F_1^*(S_1)$	3	4
X_1^*	10	10

n=2 $$F_2(S_2, X_2) = C_{s_2 x_2} + F_1^*(x_2)$$

S_2 \ X_2	8	9	$F_2^*(S_2)$	X_2^*
5	4	8	4	8
6	9	7	7	9
7	6	7	6	8

n=3 $$F_3(S_3, X_3) = C_{s_3 x_3} + F_2^*(x_3)$$

S_3 \ X_3	5	6	7	$F_3^*(S_3)$	X_3^*
2	11	11	12	11	5 ή 6
3	7	9	10	7	5
4	8	8	11	8	5 ή 6

n=4 $$F_4(S_4, X_4) = C_{s_4 x_4} + F_3^*(x_4)$$

S_4 \ X_4	2	3	4	$F_4^*(S_4)$	X_4^*
1	13	11	11	11	3 ή 4

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (4)

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ S_3 = 2 \\ X_3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow F_3(S_3, x_3) = C_{s_3 x_3} + F_2^*(x_3)$$

- $C_{s_3 x_3}$ = Κόστος (2 $\rightarrow$ 5) = 7
- Βέλτιστο κόστος για τη διαδρομή από S $\rightarrow$ 10 βρίσκεται από τον πίνακα n = 2 για S2 = X3 =5 και είναι:

$$F_2^*(5) = 4$$

Άρα $F_3(2,5) = C_{25} + F_2^*(5) = 7 + 4 = 11$

Βέλτιστη πολιτική

1 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 10

ή 1 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ 10

ή 1 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ 9 $\rightarrow$ 10

Συνολικό Κόστος $F_4^*(1) = 11$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ (1)

Ποσό που επενδύεται

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1ος Χρόνος	0	6	16	40	80	90	95	98	100
2ος Χρόνος	0	5	12	35	60	70	73	74	75
3ος Χρόνος	0	4	26	40	45	50	51	52	53

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ (2)

- Στάδια: n = 1 : 3ος χρόνος

  n = 2 : 2ος χρόνος

  n = 3 : 1ος χρόνος

- Μεταβλητή απόφασης: Πόσα επενδύονται στο στάδιο n (X_n)

- Μεταβλητή κατάστασης: Πόσα είναι διαθέσιμα κατά το στάδιο n (S_n)

- Σχέση μεταξύ s_n και x_n:

  Τα διαθέσιμα κατά το στάδιο n-1 είναι όσα ήταν διαθέσιμα κατά το στάδιο n μείον όσα επενδύθηκαν κατά το στάδιο n.

$$S_{n-1} = S_n - X_n$$

- Αναδρομική σχέση:

$$F_n(S_n, x_n) = P_{4-n}(X_n) + F^*_{n-1}(\underbrace{S_{n-1}}_{S_n - X_n})$$

* P_{4-n} (X_n): το κέρδος από την επένδυση κατά το στάδιο n (έτος 4-n) ποσου X_n.

** $F^*_{n-1}(S_{n-1})$: το κέρδος της βέλτιστης πολιτικής μέχρι το στάδιο n-1, αν τα διαθέσιμα είναι $S_{n-1} = S_n - X_n$.

$$F^*_n(S_n) = \max_{X_n}\{F_n(S_n, x_n)\}$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ (3)

n=1

S_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1^*(S_1)$	0	4	26	40	45	50	51	52	53
x_1^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$$F_2(S_2, x_2) = P_2(X_2) + F_1^*(S_2 - x_2)$$

n=2

S_2 \ x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$F_2^*(S_2)$	x_2^*
0	0									0	0
1	4	5								5	1
2	26	9	12							26	0
3	40	31	16	35						40	0
4	45	45	38	39	60					60	4
5	50	50	52	61	64	70				70	5
6	51	55	57	75	86	74	73			86	4
7	52	56	62	80	100	96	77	74		100	4
8	53	57	63	85	105	110	99	78	75	110	5

$$F_3(S_3, x_3) = P_1(X_3) + F_2^*(S_3 - x_3)$$

n=3

S_3 \ x_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$F_3^*(S_3)$	x_3^*
8	110	106	102	110	140	130	121	103	100	140	4

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΕΠΕΝΔΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ (4)

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{array}{l} n = 2 \\ S_2 = 3 \\ X_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow F_2(s_2, x_2) = P_2(x_2) + F_1^*(s_2 - x_2)$$

- $P_2(x_2)$ = Κέρδος από επένδυση x_2=1 κατά τον 4 – 2 = 2 χρόνο = 5
- Βέλτιστο κέρδος αν επενδυθούν κατά τον επόμενο χρόνο (3ο – n = 1) τα χρήματα που περίσσεψαν: $s_2 - x_2 = 3 - 1 = 2$

  Από πίνακα n=1 $F_1^*(2) = 26$

Άρα $F_2(3,1) = P_2(1) + F_1^*(2) = 5 + 26 = 31$

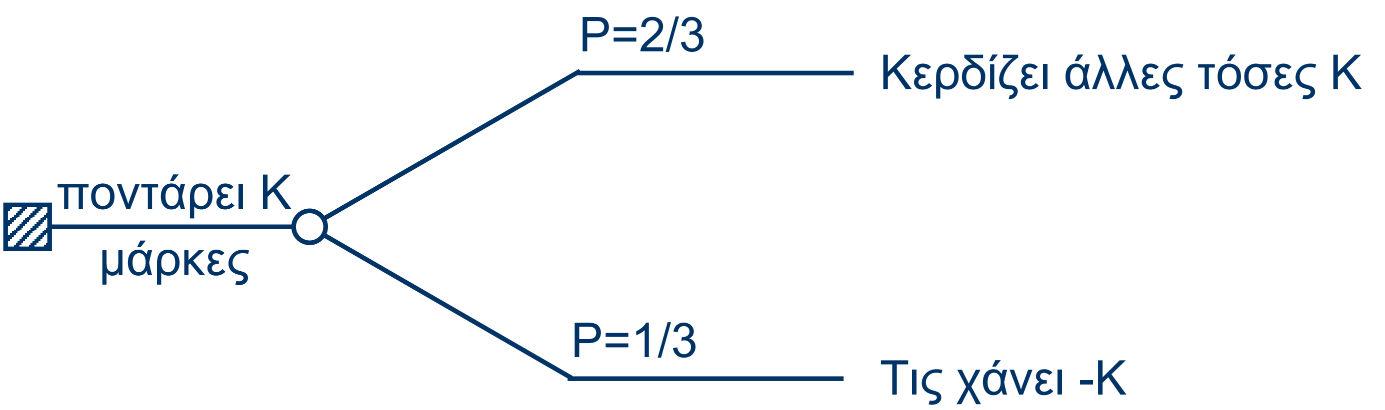
Βέλτιστη Πολιτική

4 – 4 – 0

Συνολικό κέρδος: 140

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΛΟΓΟΣ (1)



Στάδια: n=1, 2, 3

Μεταβλητή Απόφασης: x_n = Μάρκες που ποντάρει στο στάδιο n

Μεταβλητή Κατάστασης: s_n = Μάρκες που έχει στο στάδιο n

$$s_{n-1} = \begin{cases} s_n + x_n & (p=2/3) \\ s_n - x_n & (p=1/3) \end{cases}$$

Αναδρομική σχέση:

$$F_n(s_n, x_n) = \frac{2}{3} F^*_{n-1}(s_n + x_n) + \frac{1}{3} F^*_{n-1}(s_n - x_n)$$

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΛΟΓΟΣ (2)

n=1

S_1	0	1	2	3	4	≥ 5
$F_1^*(S_1)$	0	0	0	2/3	2/3	1
x_1^*	-	-	-	≥2	≥1	$\leq s_1-5$

n=2 $$F_2(s_2, x_2) = \frac{2}{3} F_1^*(s_2 + x_2) + \frac{1}{3} F_1^*(s_2 - x_2)$$

$S_2 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	$F_2^*(S_1)$	x_2^*
0	0					0	-
1	0	0				0	-
2	0	4/9	4/9			4/9	1, 2
3	2/3	4/9	2/3	2/3		2/3	0, 2, 3
4	2/3	8/9	2/3	2/3	2/3	8/9	1
≥ 5	1					1	0 ($\leq s_2-5$)

n=3 $$F_3(s_3, x_3) = \frac{2}{3} F_2^*(s_3 + x_3) + \frac{1}{3} F_2^*(s_3 - x_3)$$

$S_3 \backslash x_3$	0	1	2	3	$F_3^*(S_3)$	x_3^*
3	2/3	20/27	2/3	2/3	20/27	1

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΛΟΓΟΣ (3)