Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων

Τομεας Ηλεκτρικων Βιομηχανικων Διαταξεων και Συστηματων Αποφασεων

Εργαστηριο Συστηματων Αποφασεων και Διοικησης

Ενοτητα 9η:

Μεθοδος VIKOR - Επεκτασεις

Πολυκριτηριακά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Γιώργος Τραχανάς, Χάρης Δούκας, Ιωάννης Ψαρράς

ΜΕΡΟΣ Α’

Αβεβαιότητα

ΑΔΥΝΑΜΙΕΣ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

- Κλασικές μέθοδοι ΠΣΥΑ: οι επιδόσεις και τα βάρη είναι προσδιορισμένα με ακρίβεια.

- Στον πραγματικό κόσμο επικρατεί η ανακρίβεια (imprecision) και η αβεβαιότητα (uncertainty).

- Η γνώση του αποφασίζοντα ή του εμπειρογνώμονα είναι ακριβής: μη ρεαλιστική υπόθεση.

- Π.χ. η κρίση μας ως προς τις προτιμήσεις είναι συχνά ασαφής. Ο άνθρωπος δε μπορεί να αντιστοιχίσει συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στις προτιμήσεις του.

ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

- Πολύ συχνά, για να ληφθεί υπόψη αυτή η αβεβαιότητα, υιοθετούνται ασαφείς (fuzzy) ή στοχαστικές μέθοδοι.

- Ασαφής προσέγγιση: θεωρούνται γνωστές οι συναρτήσεις συμμετοχής (membership functions) για διάφορες παραμέτρους του προβλήματος απόφασης.

- Στοχαστική προσέγγιση: θεωρούνται γνωστές οι κατανομές πιθανότητας για διάφορες παραμέτρους του προβλήματος απόφασης.

ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Ωστόσο, στην πραγματικότητα, δεν είναι πάντα εύκολο να προσδιοριστεί μια συνάρτηση συμμετοχής ή μια κατανομή πιθανότητας.

- Σε ορισμένες περιπτώσεις, η χρήση αριθμών-διαστημάτων (interval numbers) φαίνεται δικαιολογημένη.

- Είναι ο απλούστερος τρόπος για να εκφράσουμε την αβεβαιότητα.

- Επέκταση της έννοιας του πραγματικού αριθμού.

- Σύγκριση τέτοιων αριθμών: μαθηματικά εργαλεία.

ΑΡΙΘΜΟΙ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

- Απαιτείται ελάχιστη «ποσότητα» πληροφορίας σχετικά με τις άλλες προσεγγίσεις.

- Καμία υπόθεση για πιθανότητες.

- Οι αβέβαιες παράμετροι του πίνακα απόφασης μπορούν να λάβουν οποιαδήποτε τιμή μέσα στο διάστημα που ορίζονται.

- Ένας αριθμός-διάστημα εκφράζει το εύρος ανεκτικότητας για μια παράμετρο.

ΔΟΜΗ

- Σύνολο εναλλακτικών:

$$A = \{A_1, \dots, A_m\}$$

- Σύνολο κριτηρίων:

$$C = \{C_1, \dots, C_n\}$$

- Επιδόσεις:

$$f_{ij} \in \left[f_{ij}^L, f_{ij}^U\right], \qquad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n$$

- Βάρη:

$$W = \left\{ w \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

ΔΟΜΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Πίνακας Απόφασης

	C_1	C_2	…	C_n
A_1	$[f_{11}^L, f_{11}^U]$	$[f_{12}^L, f_{12}^U]$	…	$[f_{1n}^L, f_{1n}^U]$
A_2	$[f_{21}^L, f_{21}^U]$	$[f_{22}^L, f_{22}^U]$	…	$[f_{2n}^L, f_{2n}^U]$
…	…	…	…	…
A_m	$[f_{m1}^L, f_{m1}^U]$	$[f_{m2}^L, f_{m2}^U]$	…	$[f_{mn}^L, f_{mn}^U]$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Προσδιορίζουμε τη θετική ιδεατή λύση και την αρνητική ιδεατή λύση, δηλ.

$$A^* = \{f_1^*, \dots, f_n^*\}$$

$$= \left\{\left(\max_i f_{ij}^U : j \in I\right) \text{ ή } \left(\min_i f_{ij}^L : j \in J\right)\right\}$$

και

$$A^- = \{f_1^-, \dots, f_n^-\}$$

$$= \left\{\left(\min_i f_{ij}^L : j \in I\right) \text{ ή } \left(\max_i f_{ij}^U : j \in J\right)\right\}$$

όπου I είναι τα κριτήρια οφέλους και J είναι τα κριτήρια κόστους.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

2. Για κάθε εναλλακτική, προσδιορίζουμε το διάστημα

$$S_i = \left[S_i^L, S_i^U\right]$$

ως εξής:

$$S_i^L = \sum_{j \in I} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}^U}{f_j^* - f_j^-} + \sum_{j \in J} w_j \frac{f_{ij}^L - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}$$

και

$$S_i^U = \sum_{j \in I} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}^L}{f_j^* - f_j^-} + \sum_{j \in J} w_j \frac{f_{ij}^U - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

3. Η εναλλακτική με το μικρότερο S είναι η ζητούμενη λύση.

- Όμως τα S_i είναι διαστήματα!

- Μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα συγκρίνουμε;

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

- Δίνονται δύο αριθμοί-διαστήματα (interval numbers):

$$a = [a^L, a^U], \qquad b = [b^L, b^U]$$

- Ποιος είναι μικρότερος;

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Έστω $0 < K \leq 1$.

Περιπτώσεις

- Αν δεν τέμνονται, τότε είναι αυτός με τις μικρότερες τιμές. Δηλ. αν $a^U \leq b^L$, τότε επιλέγεται ο a ως μικρότερος.
- Αν οι δύο αριθμοί-διαστήματα ταυτίζονται, τότε έχουν την ίδια προτεραιότητα.
- Αν $a^L \leq b^L < b^U \leq a^U$, τότε εργαζόμαστε ως εξής: αν ισχύει

$$K(b^L - a^L) \geq (1 - K)(a^U - b^U)$$

τότε ο a είναι ο μικρότερος. Αλλιώς, είναι ο b.

- Αν $a^L < b^L < a^U < b^U$, τότε εργαζόμαστε ως εξής: αν ισχύει

$$K(b^L - a^L) \geq (1 - K)(b^U - a^U)$$

τότε ο a είναι ο μικρότερος. Αλλιώς, είναι ο b.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Ο αριθμός K εκφράζει το επίπεδο αισιοδοξίας του αποφασίζοντα.

- Συνήθως $K = 0.5$ (ορθολογικός αποφασίζων).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Θεωρούμε τρεις εναλλακτικές A_1, A_2, A_3 και δύο κριτήρια C_1, C_2.
- Το C_1 είναι κριτήριο κόστους, ενώ το C_2 είναι κριτήριο οφέλους.
- Επίσης υποθέτουμε $w_1 = w_2 = 0.5$ και $K = 0.6$.

Πίνακας Απόφασης

	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$
$\boldsymbol{A_1}$	$[0.75, 1.24]$	$[2784, 3192]$
$\boldsymbol{A_2}$	$[1.83, 2.11]$	$[3671, 3857]$
$\boldsymbol{A_3}$	$[4.90, 5.37]$	$[4409, 4681]$

cost

benefit

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Θετική και αρνητική ιδεατή λύση

	C_1	C_2
f_j^*	0.75	4681
f_j^-	5.37	2784

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Αριθμοί S

	$[S_i^L, S_i^U]$
A_1	$[0.3925, 0.5530]$
A_2	$[0.3341, 0.4134]$
A_3	$[0.4491, 0.5717]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

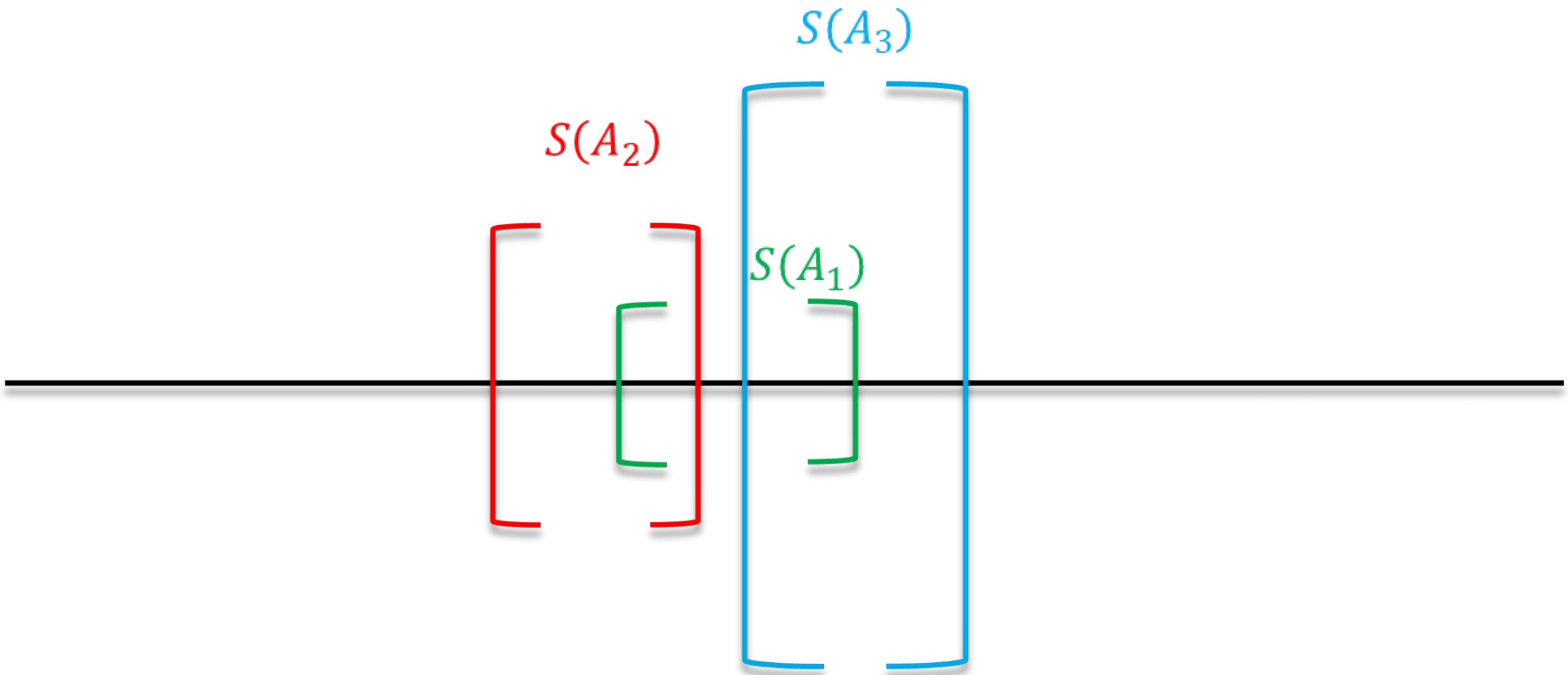
Π.χ.

$$S_2^L = w_2 \frac{f_2^* - f_{22}^U}{f_2^* - f_2^-} + w_1 \frac{f_{21}^L - f_1^*}{f_1^- - f_1^*}$$

$$= (0.5)\frac{4681 - 3857}{4681 - 2784} + (0.5)\frac{1.83 - 0.75}{5.37 - 0.75}$$

$$= 0.3341$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Παρατηρούμε ότι

$$S(A_2) < S(A_3)$$

Ελέγχουμε $S(A_1)$ και $S(A_2)$:

$$(0.6)(0.3925 - 0.3341) \geq (0.4)(0.5530 - 0.4134) \ \ ?$$

Δεν ισχύει. Άρα

$$S(A_1) < S(A_2)$$

- Λύση: A_1

ΣΥΝΟΨΙΖΟΝΤΑΣ …

- Ο προσδιορισμός τιμών με ακρίβεια για τα διάφορα χαρακτηριστικά – κριτήρια είναι δύσκολος, αν όχι αδύνατος.
- Επομένως, συνιστάται η χρήση αριθμών-διαστημάτων.
- Επεκτείναμε τη μέθοδο VIKOR ώστε να συμπεριλάβει τέτοιους «αριθμούς» στο πρόβλημα απόφασης.
- Υπολογίσαμε τα S ως διαστήματα.
- Καταλήξαμε σε μια λύση βασιζόμενοι στην έννοια της εγγύτητας από τη θετική ιδεατή λύση.
- Χρειάστηκε να συγκρίνουμε διαστήματα.

- Η τελική απόφαση εξαρτάται από το επίπεδο αισιοδοξίας του αποφασίζοντα.
- Προφανώς, με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να αξιοποιήσουμε και τα μέτρα R και Q.

ΜΕΡΟΣ Β’

Βάρη με ελλιπή πληροφόρηση

ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑΘΜΙΣΗΣ

- Τα βάρη των κριτηρίων έχουν καθοριστικό ρόλο στον προσδιορισμό της τελικής απόφασης.

- Οι μέθοδοι στάθμισης (weighting methods) ποικίλουν:
  - Equal weights
  - Direct weighting method
  - Entropy method
  - AHP (Analytic Hierarchy Process)
  - Fuzzy method
  - …

ΕΛΛΙΠΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗ

- Μη ακριβή βάρη:
  - Έλλειψη χρόνου.
  - Ο αποφασίζων δεν επιθυμεί να εκφραστεί με ακρίβεια.
  - Ο αποφασίζων έχει στη διάθεσή του ελλιπή πληροφορία.
  - Με ρεαλιστική θεώρηση.
- Εμείς θα δούμε τη μέθοδο *VIKOR για βάρη με ελλιπή πληροφόρηση* (incomplete information criteria weights).

ΜΟΡΦΕΣ ΒΑΡΩΝ ΜΕ ΕΛΛΙΠΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗ

1. Lower bounds (LB):

$$W_{LB} = \{\boldsymbol{w}\colon\ w_j \geq a_j > 0\}$$

2. Weak inequalities (WI):

$$W_{WI} = \{\boldsymbol{w}\colon\ w_1 \geq w_2 \geq\ \dots\ \geq w_n \geq 0\}$$

3. Ratio scale inequalities (RI):

$$W_{RI} = \{\boldsymbol{w}\colon\ w_1 \geq a_1 w_2, \dots, w_{n-1} \geq a_{n-1} w_n,\quad a_j > 0\}$$

4. …

- Πλεονεκτήματα:
  - Παρέχουν ελευθερία στον αποφασίζοντα.
  - Μειώνουν τον φόρτο συλλογής δεδομένων.
- ✓ Θα δούμε την περίπτωση 2 **(WI)** που είναι η πλέον διαδεδομένη.

VIKOR: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΒΑΡΗ

Κατηγορίες VIKOR

Επιδόσεις	**Βάρη κριτηρίων**	
	Ακριβή	Ελλιπή
Ακριβείς	ΝΑΙ (√)	ΝΑΙ (√)
Διαστήματα	ΝΑΙ (√)	ΝΑΙ (Kim & Ahn, 2019)

- Δύο μέθοδοι επίλυσης:
    - Γραμμικός προγραμματισμός.
    - Μέθοδος των ακραίων σημείων (extreme points). √

ΑΚΡΑΙΑ ΣΗΜΕΙΑ

- Τα ελλιπή βάρη (WI) οδηγούν φυσιολογικά σε ένα σύνολο ακραίων σημείων.
- Ακραία σημεία στην περίπτωση n κριτηρίων:

$$\lambda_1 = (1,0,0,\ldots,0)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{n-1} = \left(\frac{1}{n-1},\ldots,\frac{1}{n-1},0\right)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

1. Πίνακας ακραίων σημείων:

$$\boldsymbol{E} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 0 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 0 & 0 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

2. Συμβολίζουμε με I το σύνολο των κριτηρίων οφέλους και με J το σύνολο των κριτηρίων κόστους. Προφανώς $|I| + |J| = n$.

Για κάθε εναλλακτική, γράφουμε το διάνυσμα:

$$\boldsymbol{d_i} = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$$

όπου

$$d_{ij} = \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}, \qquad \text{όταν } j \in I$$

και

$$d_{ij} = \frac{f_{ij} - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}, \qquad \text{όταν } j \in J$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- **<u>Προσοχή:</u>** η σειρά με την οποία «μπαίνουν» οι συνιστώσες d_{ij} μέσα στο διάνυσμα $\boldsymbol{d_i}$ εξαρτάται από τη σχετική σπουδαιότητα των κριτηρίων.

- Έχουμε υποθέσει ότι $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ και γι' αυτό τον λόγο έχουμε τη μορφή

$$\boldsymbol{d_i} = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$$

- Η διάταξη των συνιστωσών «ακολουθεί» τη διάταξη των βαρών.

- Αν όμως, π.χ. υποθέσουμε ότι έχουμε 7 κριτήρια με την ακόλουθη σχέση:

$$w_3 \geq w_1 \geq w_4 \geq w_2 \geq w_7 \geq w_5 \geq w_6$$

τότε, σε αυτή την περίπτωση, το $\boldsymbol{d_i}$ θα έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{d_i} = (d_{i3}, d_{i1}, d_{i4}, d_{i2}, d_{i7}, d_{i5}, d_{i6})$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- **Ερμηνεία:** κάθε συνιστώσα του διανύσματος $\boldsymbol{d_i}$ εκφράζει την κανονικοποιημένη απόκλιση από την καλύτερη τιμή του κριτηρίου που αντιστοιχεί.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

3. **Υπολογισμός $\boldsymbol{S}$.** Για κάθε εναλλακτική υπολογίζουμε το διάστημα

$$S_i = \left[S_i^L, S_i^U\right]$$

από τις σχέσεις

$$S_i^L = \min\{\boldsymbol{d_i E}\}$$

και

$$S_i^U = \max\{\boldsymbol{d_i E}\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Πίνακας Απόφασης

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	3200	450	17	30
A_2	2400	690	98	70
A_3	2500	440	200	25
A_4	2800	460	90	50
A_5	1200	160	5	20
	benefit	benefit	benefit	cost

$$w_3 \geq w_1 \geq w_4 \geq w_2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

	C_1	C_2	C_3	C_4
f_j^*	3200	690	200	20
f_j^-	1200	160	5	70
$\left\| f_j^* - f_j^- \right\|$	2000	530	195	50

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$\left|\frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}\right| = d_{ij}$$

	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$	$\boldsymbol{C_3}$	$\boldsymbol{C_4}$
	d_{i1}	d_{i2}	d_{i3}	d_{i4}
$\boldsymbol{A_1}$	0.00	0.45	0.93	0.20
$\boldsymbol{A_2}$	0.40	0.00	0.52	1.00
$\boldsymbol{A_3}$	0.35	0.47	0.00	0.10
$\boldsymbol{A_4}$	0.20	0.43	0.56	0.60
$\boldsymbol{A_5}$	1.00	1.00	1.00	0.00

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Έχουμε:

$$w_3 \geq w_1 \geq w_4 \geq w_2$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{d_i} = (d_{i3}, d_{i1}, d_{i4}, d_{i2}), \qquad i = 1, \dots, 5$$

δηλ.

$$\boldsymbol{d_1} = (0.93, 0.00, 0.20, 0.45)$$

$$\boldsymbol{d_2} = (0.52, 0.40, 1.00, 0.00)$$

$$\boldsymbol{d_3} = (0.00, 0.35, 0.10, 0.47)$$

$$\boldsymbol{d_4} = (0.56, 0.20, 0.60, 0.43)$$

$$\boldsymbol{d_5} = (1.00, 1.00, 0.00, 1.00)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Μένει να υπολογίσουμε τα $\boldsymbol{d_i E}$.

Π.χ.

$$\boldsymbol{d_1 E} = (0.93, 0.00, 0.20, 0.45)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$= (0.93, 0.46, 0.37, 0.39)$$

Επομένως

$$S_1^L = \min\{0.93, 0.46, 0.37, 0.39\} = 0.37$$

και

$$S_1^U = \max\{0.93, 0.46, 0.37, 0.39\} = 0.93$$

δηλ.

$$S_1 = [0.37, 0.93]$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

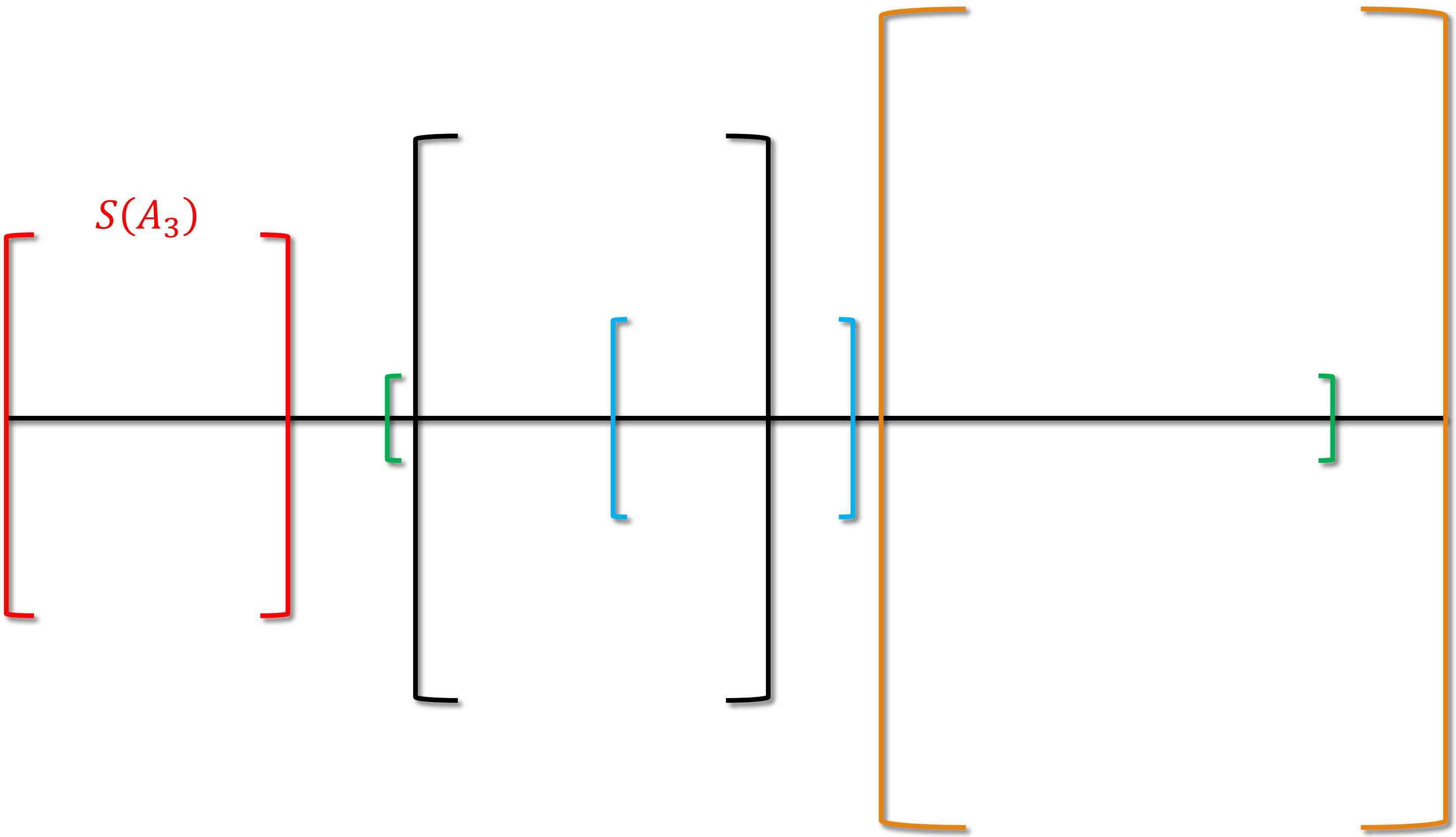
- Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε και τα υπόλοιπα S_i.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

	S_i
A_1	$[0.37, 0.93]$
A_2	$[0.46, 0.64]$
A_3	$[0.00, 0.23]$
A_4	$[0.38, 0.56]$
A_5	$[0.66, 1.00]$

- **Σύγκριση αριθμών-διαστημάτων!**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Παρατηρούμε ότι ο αριθμός-διάστημα $S(A_3)$ είναι ο μικρότερος.

- Επομένως, βάσει του μέτρου S, η ενδεδειγμένη λύση είναι η εναλλακτική A_3.

- Προφανώς, μπορεί κάποιος να προχωρήσει περαιτέρω και να αξιοποιήσει μέτρα τύπου R και Q, στο πνεύμα της κλασικής προσέγγισης VIKOR (βλ. [Kim & Ahn, 2019]).

Βιβλιογραφια

Sayadi M.K., Heydari M., & Shahanaghi K. (2009). *Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers*, Applied Mathematical Modelling 33 (5), pp. 2257-2262.

Ahn B.S. (2015), Extreme point-based multi-attribute decision analysis with incomplete information, European Journal of Operational Research 240 (3), pp. 748-755.

Kim J.H. & Ahn B.S. (2019), *Extended VIKOR method using incomplete criteria weights*, Expert Systems with Applications 126 (15), pp. 124-132.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Thank you!

Georgios Trachanas

Email: gtrachanas@epu.ntua.gr