Άσκηση 16

Η δραστηριότητα ενός συνεταιρισμού παρασκευής κρασιού μιας πόλης, περιλαμβάνει την παραλαβή σταφυλιών και τη ζύμωση του μούστου, με σκοπό τη δημιουργία κρασιού. Η ζύμωση πραγματοποιείται σε δύο οινοποιεία που βρίσκονται, το ένα παραλιακά στην πόλη και το άλλο στο κέντρο της. Η ελάχιστη εβδομαδιαία ζήτηση κρασιού στην πόλη ανέρχεται στους 250 τόνους. Σαν σύμβουλος του συνεταιρισμού καλείστε να καθορίσετε τα βέλτιστα επίπεδα δραστηριότητας των δύο οινοποιείων του. Τα τεχνοοικονομικά δεδομένα του προβλήματος συνοψίζονται στα ακόλουθα:

- 100 κιλά σταφύλια αντιστοιχούν σε 60 κιλά κρασί.
- Το κόστος ζύμωσης συμπεριλαμβάνει την απασχόληση του εργατικού δυναμικού.
- Περιορισμοί που οφείλονται στα μεταφορικά μέσα, δεν επιτρέπουν τη μεταφορά περισσοτέρων από 550 τόνους σταφυλιών προς τα δύο οινοποιεία εβδομαδιαίως.
- Σε εβδομαδιαία βάση διατίθενται 55 ώρες εργασίας που κατανέμονται ελεύθερα στα δύο οινοποιεία.

Οινοποιείο	Κόστος μεταφοράς ανά τόνο σταφυλιών	Κόστος ζύμωσης ανά τόνο σταφυλιών	Απαιτούμενη εργασία ανά τόνο σταφυλιών	Εβδομαδιαία μέγιστη δυνατότητα ζύμωσης
Παραλιακό	15 €	45 €	0,10 ώρες	250 τόνοι
Κεντρικό	20 €	30 €	0,15 ώρες	450 τόνοι

Άσκηση 16

1. Να διατυπωθούν και επιλυθούν τα μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού που εντοπίζουν:
   a) την εβδομαδιαία παραγωγή κρασιού που ελαχιστοποιεί το κόστος του συνεταιρισμού.
   b) τη μέγιστη δυνατή εβδομαδιαία παραγωγή των οινοποιείων.
2. Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του κόστους, (a), να δοθεί η ερμηνεία κάθε μιας δυαδικής μεταβλητής και να προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση του.
3. Προσδιορίστε για ποια τιμή κόστους ζύμωσης στο κεντρικό οινοποιείο, θα έχουμε απειρία λύσεων στο πρωτεύον πρόβλημα (a) αν όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμείνουν σταθερές.
4. Να επιλυθεί το πρόβλημα (b) με την μέθοδο SIMPLEX.

Άσκηση 16

Ερώτημα 1

Μεταβλητές Απόφασης

Έστω:

x_1 : Ποσότητα σταφυλιών για ζύμωση στο παραλιακό οινοποιείο (tn/ εβδ.)

x_2 : Ποσότητα σταφυλιών για ζύμωση στο κεντρικό οινοποιείο (tn/ εβδ.)

Περιορισμοί

100 κιλά σταφυλιών = 60 κιλά κρασί

- Ελάχιστη εβδομαδ. ζήτηση κρασιού: $0{,}6x_1 + 0{,}6x_2 \geq 250$ (I)
- Χωρητικότητα λόγω Μεταφορικών: $x_1 + x_2 \leq 550$ (II)
- Εργατικό δυναμικό: $0{,}10x_1 + 0{,}15x_2 \leq 55$ (III)
- Δυναμικότητα οινοποιείων: $x_1 \leq 250$ (IV)

  $x_2 \leq 450$ (V)

* $x_1, x_2 \geq 0$

Αντικειμενικές Συναρτήσεις

Κόστος μεταφοράς και κόστος ζύμωσης
(15+45=60)
(20+30=50)

❖ Εβδομαδιαία παραγωγή που ελαχιστοποιεί το κόστος:

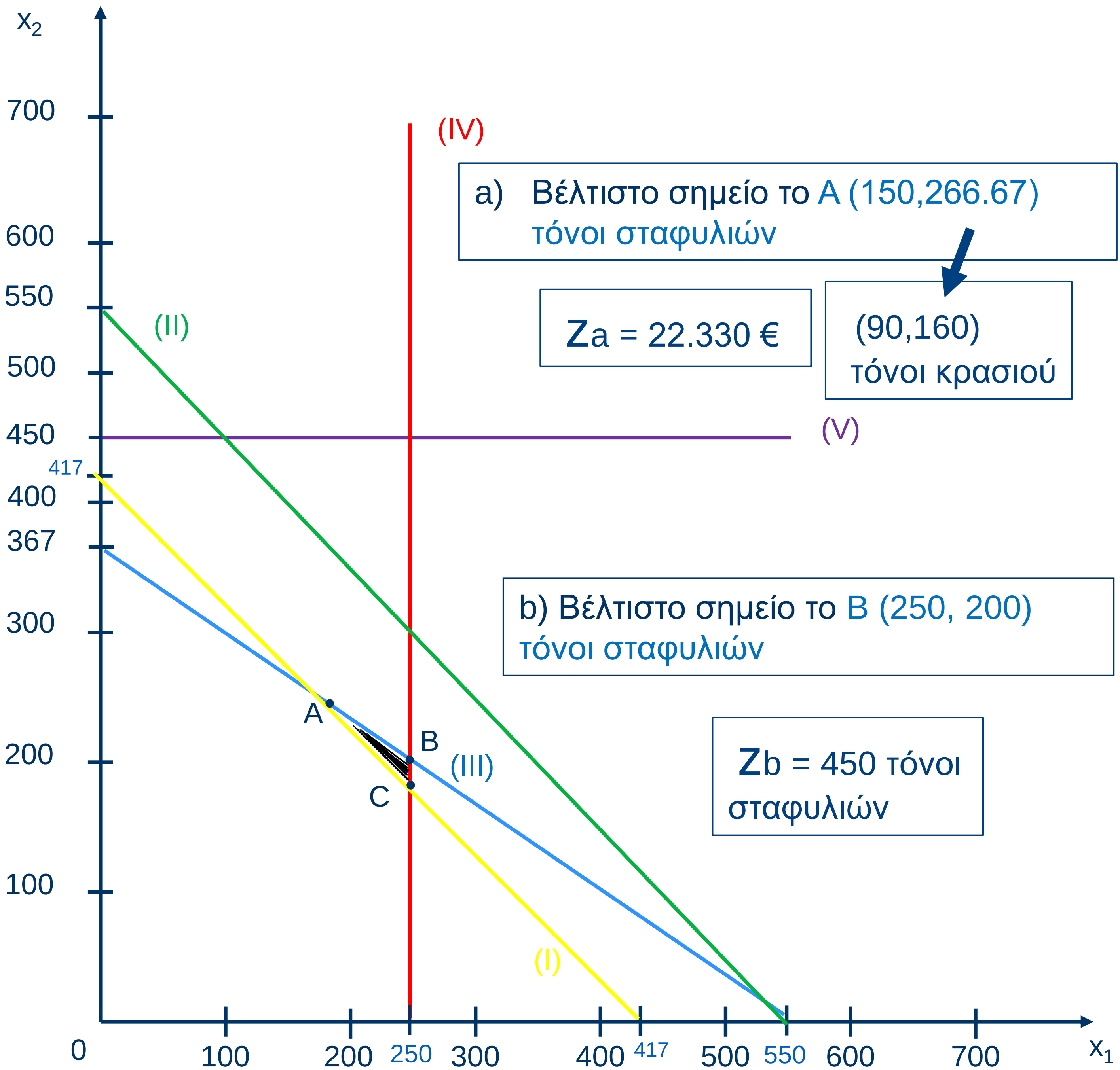
$\min[z_a] = 60x_1 + 50x_2$ (€/εβδ.)

❖ Μέγιστη δυνατή εβδομαδιαία παραγωγή οινοποιείων:

$\max[z_b] = x_1 + x_2$ (tn/εβδ.)

Άσκηση 16

Ερώτημα 1



Άσκηση 16

Ερώτημα 2

➢ Περιορισμοί

- $0{,}6x_1 + 0{,}6x_2 \geq 250$ — Π_1: Ορ. αξία για αύξηση ζήτησης 1 tn κρασί
- $x_1 + x_2 \leq 550$ — Π_2: Ορ. αξία της μεταφορικής δυναμικότητας
- $0{,}10x_1 + 0{,}15x_2 \leq 55$ — Π_3: Ορ. αξία της επιπλέον ώρας εργασίας
- $x_1 \leq 250$ — Π_4: Ορ. αξία της δυναμικότητας
- $x_2 \leq 450$ — Π_5: Ορ. αξία της δυναμικότητας

$$\boxed{\min[z] = 60x_1 + 50x_2 \ (€/εβδ.)}$$

➢ Μετατροπή στο Δυαδικό

- $0{,}6x_1 + 0{,}6x_2 \geq 250$
- $-x_1 - x_2 \geq -550$
- $-0{,}10x_1 - 0{,}15x_2 \geq -55$
- $-x_1 \geq -250$
- $-x_2 \geq -450$

$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5 \geq 0$

$0{,}6\Pi_1 - \Pi_2 - 0{,}1\Pi_3 - \Pi_4 \leq 60$

$0{,}6\Pi_1 - \Pi_2 - 0{,}15\Pi_3 - \Pi_5 \leq 50$

$\max[u] = 250\Pi_1 - 550\Pi_2 - 55\Pi_3 - 250\Pi_4 - 450\Pi_5$

$\Pi_1 = 133{,}33$
$\Pi_3 = 200$
$\Pi_2, \Pi_4 = 0$

$u = 22.330$ €

Άσκηση 16

Ερώτημα 3

➢ Κόστος ζύμωσης στο κεντρικό οινοποιείο C

Έστω: C το κόστος ζύμωσης στο κεντρικό οινοποιείο

C^I το συνολικό κόστος παραγωγής του κεντρικού οινοποιείου

Τότε η αντικειμενική συνάρτηση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\boxed{\min[z'] = 60x_1 + (20 + C)\, x_2 = 60x_1 + C^I * x_2}$$

Άρα $\lambda_{z'} = -60 / C^I$ (I)

Για να έχω απειρία λύσεων, πρέπει

$\lambda_{z'} = \lambda_1^* \Rightarrow -60 / C^I = -1$

Άρα $C^I = 60$ και από (I): $C = 40$ €

Η κλίση της ευθείας του 1ου περιορισμού

Άσκηση 16

Ερώτημα 4

Μετατρέπουμε το γραμμικό πρόβλημα στην πρότυπη μορφή του με εισαγωγή μεταβλητής απόκλισης

$$\max[z] = x_1 + x_2 + 0*S_1 + 0*S_2 + 0*S_3 + 0*S_4 + 0*S_5 - M*A_1$$

$$0{,}6x_1 + 0{,}6x_2 - S_1 + A_1 = 250$$

$$x_1 + x_2 + S_2 = 550$$

$$0{,}10x_1 + 0{,}15x_2 + S_3 = 55$$

$$x_1 + S_4 = 250$$

$$x_2 + S_5 = 450$$

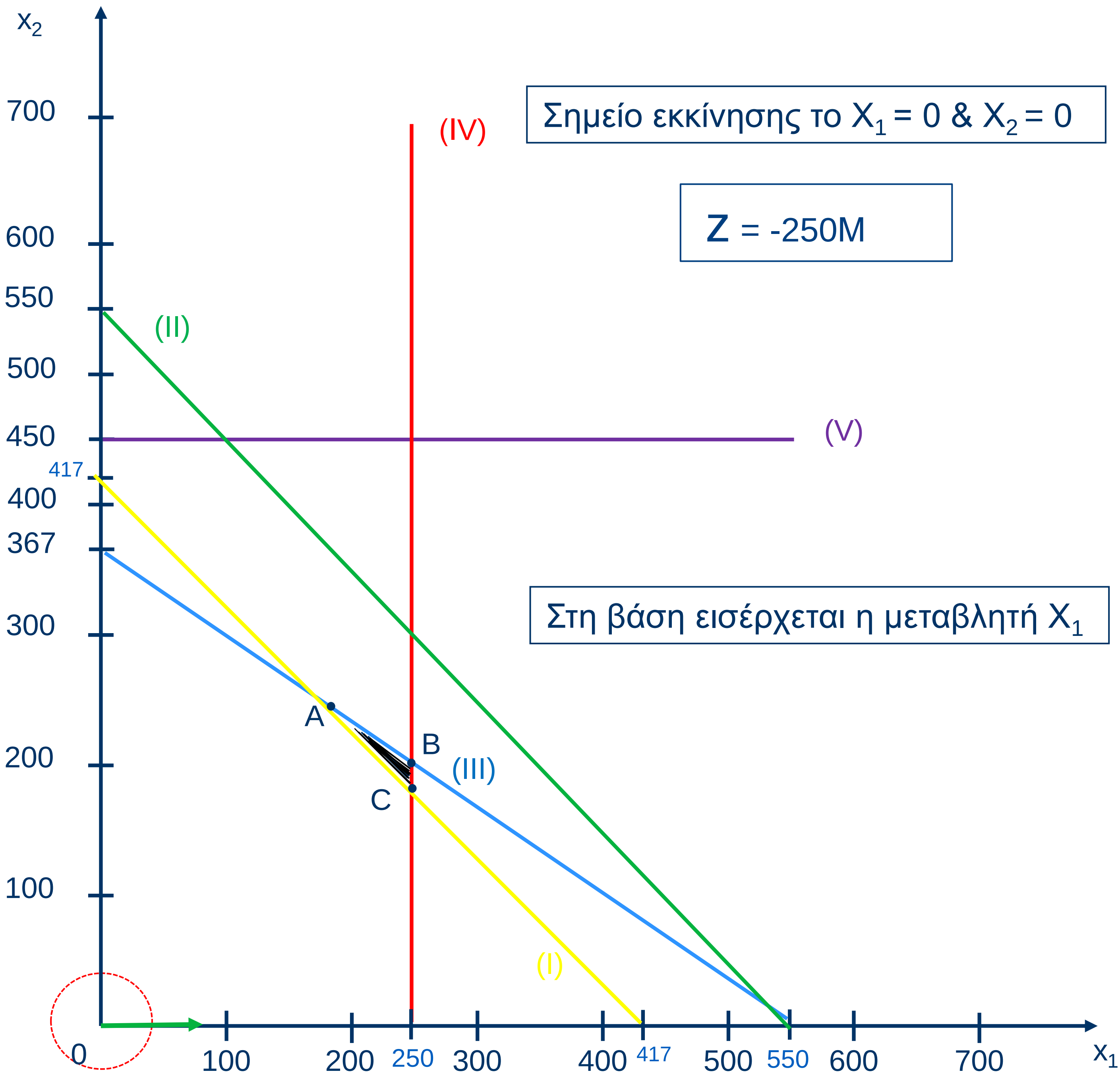
$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, A_1, M_1 \geq 0$$

Βάση	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	A_1	Δεξί Μέρος
A_1	0,6	0,6	-1	0	0	0	0	1	250
S_2	1	1	0	1	0	0	0	0	550
S_3	0,10	0,15	0	0	1	0	0	0	55
S_4	1	0	0	0	0	1	0	0	250
S_5	0	1	0	0	0	0	1	0	450
C_j	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\overrightarrow{C_j}$	1+0,6M	1+0,6M	-M	0	0	0	0	0	Z= -250M

Ο μικρότερος θετικός λόγος, δηλαδή η S4 (250/1 = 250) Καθορίζει ποια μεταβλητή θα εξέλθει από τη βάση

Άσκηση 16

Ερώτημα 4



Άσκηση 16

Ερώτημα 4

Βάση	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	A_1	Δεξί Μέρος
A_1	0	0,6	-1	0	0	-0,6	0	1	100
S_2	0	1	0	1	0	-1	0	0	300
S_3	0	0,15	0	0	1	-0,1	0	0	30
X_1	1	0	0	0	0	1	0	0	250
S_5	0	1	0	0	0	0	1	0	450
C_j	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\vec{C_j}$	0	1+0,6M	-M	0	0	1-0,6M	0	0	Z= 250-100M

$$\vec{C}_{S_4} = C_{S_4} - Z_{S_4}$$
$$= 0 – [1·1 – 0.6·(\text{-M})]$$
$$= 1 \text{ - } 0.6\text{M}$$

$$Z = C_j \times X_B$$
$$= 1·250 + 1·0 + 0·0 + 0·300 + 0·30 + 0·0 + 0·450 – \text{M}·100$$
$$= 250 - 100\text{M}$$

Άσκηση 16

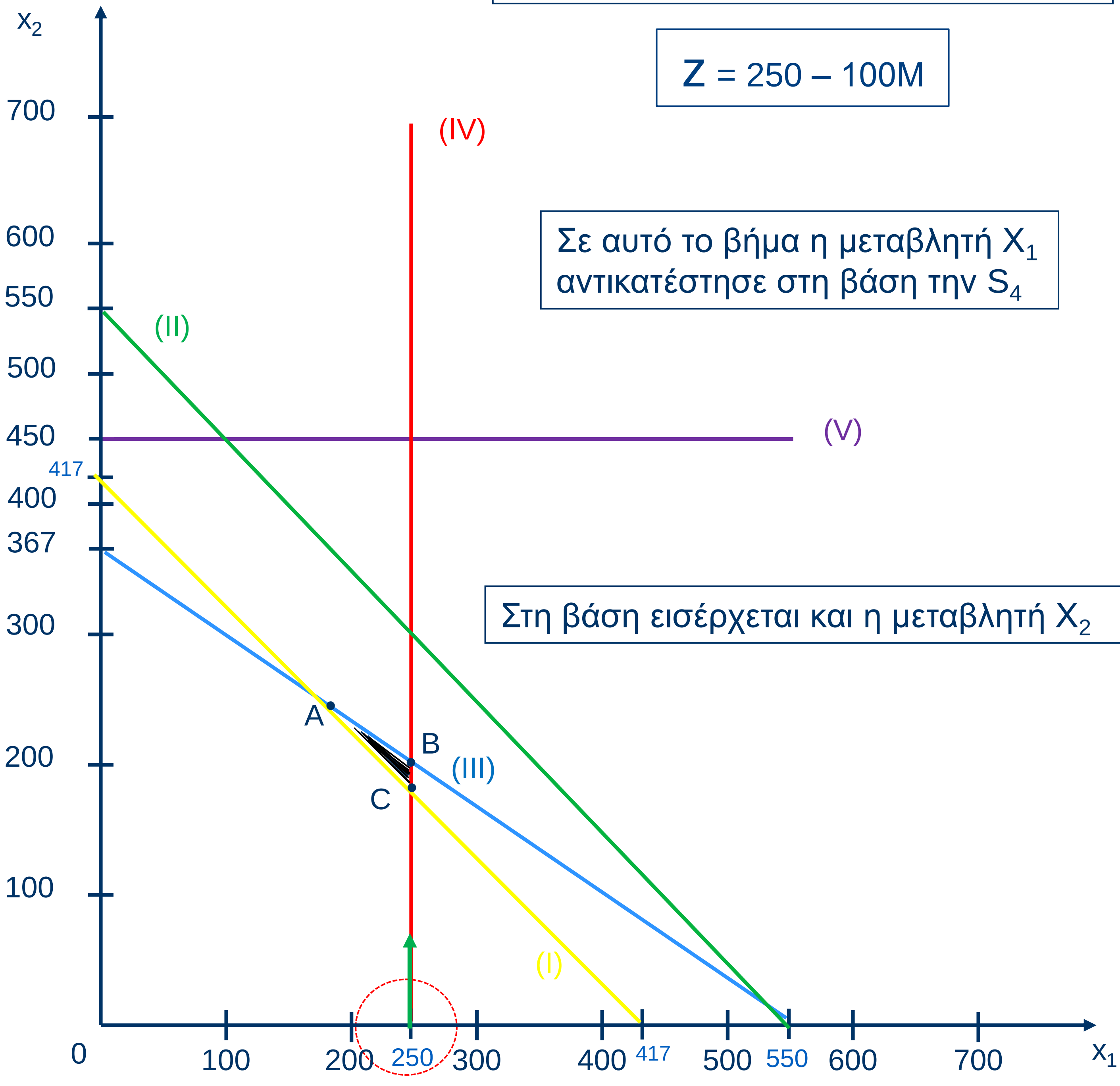
Ερώτημα 4

Σημείο βήματος 1 το $X_1 = 250$ & $X_2 = 0$

$Z = 250 - 100M$

Σε αυτό το βήμα η μεταβλητή X_1 αντικατέστησε στη βάση την S_4

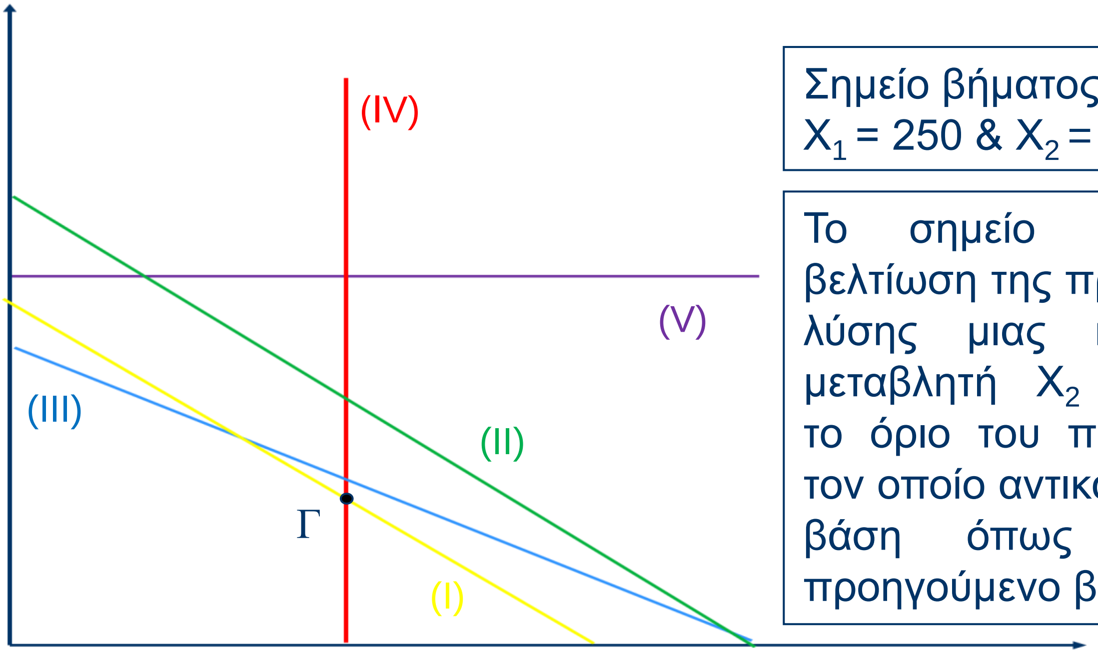
Στη βάση εισέρχεται και η μεταβλητή X_2



Άσκηση 16

Ερώτημα 4

Βάση	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	A_1	Δεξί Μέρος
X_2	0	1	-1.66	0	0	-1	0	-1.66	166.66
S_2	0	0	1.66	1	0	0	0	1.66	133.33
S_3	0	0	0.25	0	1	0.05	0	-0.25	5
X_1	1	0	0	0	0	1	0	0	250
S_5	0	0	1.66	0	0	1	1	-1,66	283.33
C_j	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\overrightarrow{C_j}$	0	0	1.66	0	0	0	0	-2.66M	Z= 416.66



Σημείο βήματος 2 το Γ
$X_1 = 250$ & $X_2 = 166,66$

Το σημείο Γ αποτελεί βελτίωση της προηγούμενης λύσης μιας και για τη μεταβλητή X_2 εξαντλήθηκε το όριο του περιορισμού I τον οποίο αντικατέστησε στη βάση όπως όρισε το προηγούμενο βήμα

Άσκηση 16

Ερώτημα 4

Βάση	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	A_1	Δεξί Μέρος
X_2	0	1	0	0	6.66	-0.66	0	-3.33	200
S_2	0	0	0	1	-6.66	-0.33	0	0	100
S_1	0	0	1	0	4	0.2	0	-1	20
X_1	1	0	0	0	0	1	0	0	250
S_5	0	0	0	0	-6.66	0.66	1	0	250
C_j	1	1	0	0	0	0	0	-M	
$\overrightarrow{C_j}$	0	0	0	0	-6.66	-0.33	0	-M +3.33	Z= 450

Δεν υπάρχει άλλο θετικό Ο.Κ.Ε. επομένως δεν υπάρχουν περιθώρια περαιτέρω βελτίωσης της λύσης.

Βέλτιστο σημείο το Β (250, 200) τόνοι σταφυλιών όπως και στην γραφική επίλυση

Άσκηση 17

Η εταιρεία Kappa διαθέτει δύο εργοστάσια, το εργοστάσιο Α και το εργοστάσιο Β, τα οποία παράγουν τα ίδια προϊόντα, το προϊόν 1 και το προϊόν 2. Καθένα από αυτά απασχολεί 150 εργάτες που καθένας τους εργάζεται 140 ώρες το μήνα. Τα δεδομένα παραγωγής των δύο εργοστασίων συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

	Κόστος παραγωγής προϊόντος 1 (ανά ώρα)	Κόστος παραγωγής προϊόντος 2 (ανά ώρα)	Παραγωγικότητα προϊόντος 1 (ανά ώρα εργασίας)	Παραγωγικότητα προϊόντος 2 (ανά ώρα εργασίας)
Εργοστάσιο Α	5 €	3 €	1	4
Εργοστάσιο Β	3,5 €	2 €	1	1

Όμως, πτώση στις πωλήσεις το τελευταίο χρονικό διάστημα οδηγεί την εταιρεία στην υπογραφή σύμβασης με έναν ιδιώτη αγοραστή. Σύμφωνα με αυτή τη σύμβαση όλη η παραγωγή της νέας εταιρείας θα απορροφάται αποκλειστικά από το συγκεκριμένο αγοραστή, οι παραγγελίες του οποίου ανέρχονται σε 30.000 κομμάτια προϊόντος 1 και 15.000 κομμάτια προϊόντος 2 σε μηνιαία βάση. Επιβάλλεται, λοιπόν, η παραγωγή της Kappa να ισούται ακριβώς με τη ζήτηση αυτή.

Άσκηση 17

1α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα κατανομής της παραγωγής της εταιρείας Kappa με κατάλληλο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού (ΓΠ), ελαχιστοποιώντας το κόστος.

1β) Εκμεταλλευόμενοι τις σχέσεις ισότητας συγκεκριμένων περιορισμών, προτείνετε ένα ισοδύναμο μοντέλο ΓΠ δύο μεταβλητών απόφασης, και επιλύστε το χρησιμοποιώντας τη γραφική μέθοδο. Ποιος είναι ο βέλτιστος μηνιαίος καταμερισμός παραγωγής στα δύο εργοστάσια και ποιες οι επιπτώσεις της λύσης αυτής στο εργατικό δυναμικό τους;

2) Διατυπώστε το δυαδικό πρόβλημα του ΓΠ, και δώστε την οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

3) Επιλύστε το πρόβλημα 1β) με τη μέθοδο SIMPLEX.

4) Αν η λύση του ερωτήματος 1β) κριθεί ως ακατάλληλη από το Υπουργείο Εργασίας λόγω της απόλυσης υπεράριθμου προσωπικού, και η διεύθυνση δεχτεί να αυξήσει το κόστος παραγωγής μέχρι 10%, προτείνετε ένα νέο μοντέλο ΓΠ, επέκταση του υφιστάμενου, με στόχο την ελαχιστοποίηση της ανεργίας.

Άσκηση 17

Ερώτημα 1α)

➢ Μεταβλητές Απόφασης

Έστω: x_{ij} : Μηνιαία παραγωγή (κομμάτια/μήνα) του προϊόντος j, που παράγεται από το εργοστάσιο i.

Όπου:

- i=1 όταν το προϊόν παράγεται από το εργοστάσιο Α και i=2 όταν παράγεται από το εργοστάσιο Β.
- j=1 όταν αναφερόμαστε στο προϊόν 1 και j=2 όταν αναφερόμαστε στο προϊόν 2.

➢ Περιορισμοί

Μηνιαία παραγωγή προϊόντος 1 που παράγεται από τα εργοστάσια Α,Β

Ζήτηση βάσει σύμβασης:

- $x_{11} + x_{21} = 30.000$ κομμάτια προϊόντος 1 / μήνα (I)
- $x_{12} + x_{22} = 15.000$ κομμάτια προϊόντος 2 / μήνα (II)

Εργατικό Δυναμικό

- $x_{11} / 1 + x_{12} / 4 \leq 21.000$ ανθρωποώρες / μήνα (III)
- $x_{21} / 1 + x_{22} / 1 \leq 21.000$ ανθρωποώρες / μήνα (IV)

150 εργάτες * 140 ώρες εργασίας του καθενός = 21.000 ανθρωποώρες/μήνα

Φυσικοί περιορισμοί:

- $X_{ij} \geq 0$

Άσκηση 17

Ερώτημα 1α)

➢ Αντικειμενική Συνάρτηση

Μηνιαία παραγωγή που ελαχιστοποιεί το κόστος:

- $\min[z] = 5x_{11} + 3\,x_{12}/4 + 3{,}5x_{21} + 2x_{22}$ (€/μήνα)

Ερώτημα 1β)

Θέτουμε:

$$\left.\begin{array}{l} X_{21} = 30.000 - x_{11} \geq 0 \\ X_{22} = 15.000 - x_{12} \geq 0 \end{array}\right\} +$$

Λόγω της (IV) :

$45.000 - (x_{11} + x_{12}) \leq 21.000$

Άρα,

$x_{11} + x_{12} \geq 24.000$ (1)

$x_{11} \leq 30.000$ (2)

$x_{12} \leq 15.000$ (3)

$x_{11} / 1 + x_{12} / 4 \leq 21.000$ (4)

Επομένως με αντικατάσταση, η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται:

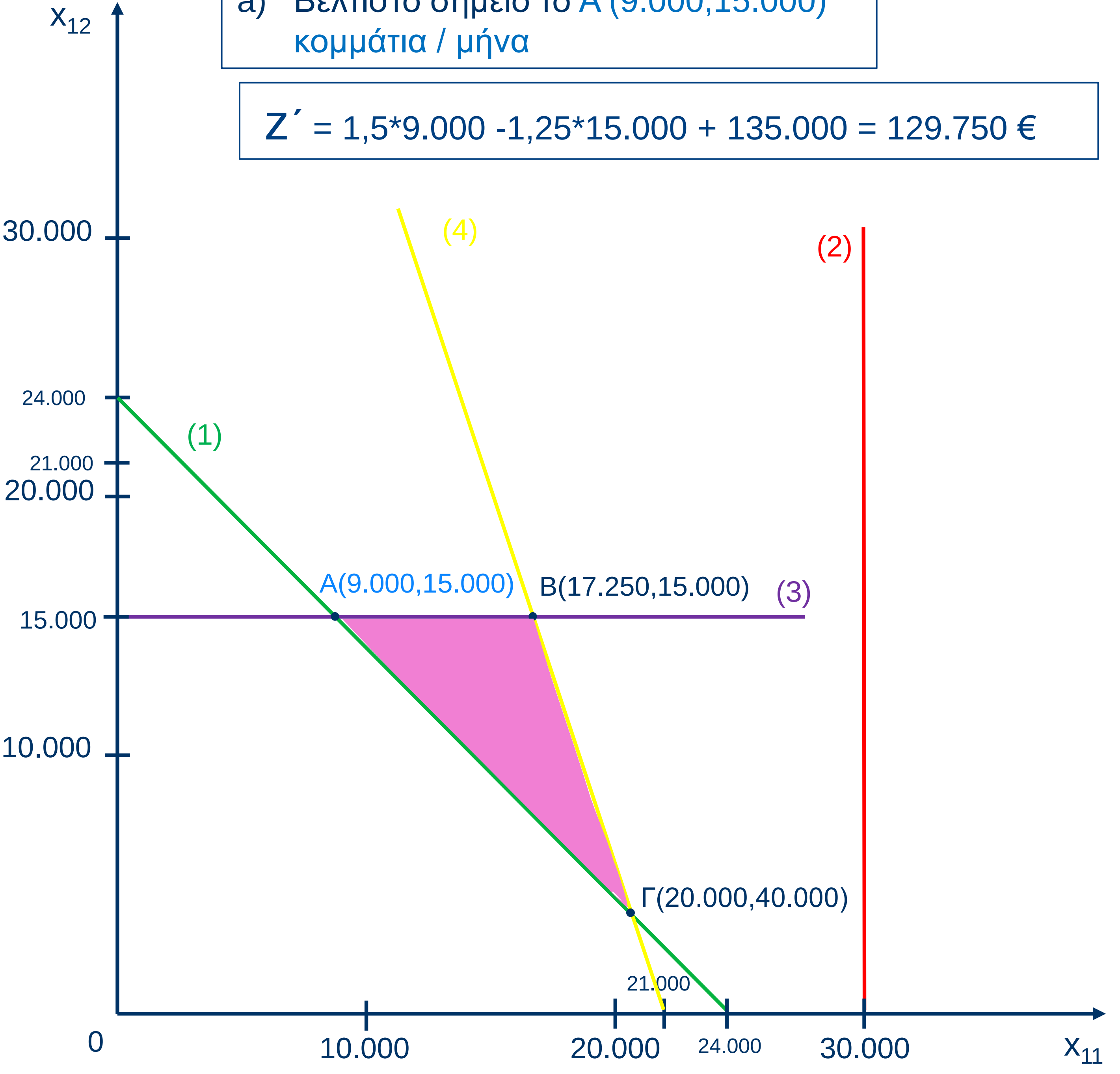
$\min[z] = 1{,}5x_{11} - 1{,}25x_{12} + 135.000$ (€/μήνα)

Άσκηση 17

Ερώτημα 1β)

a) Βέλτιστο σημείο το A (9.000,15.000) κομμάτια / μήνα

Z΄ = 1,5*9.000 -1,25*15.000 + 135.000 = 129.750 €



Άσκηση 17

Ερώτημα 1β)

	Προϊόν 1	Προϊόν 2	Κόστος Παραγωγής	Απολύσεις
Εργοστάσιο Α	9.000	15.000		58
Εργοστάσιο Β	21.000	0		0
Σύνολο	30.000	15.000	129.750	58

Απολύσεις:

Εργοστάσιο Α: (1/140)*(21.000-x_{11}- 0,25x_{12}) ≈ 58 εργάτες

δεν χρειάζονται, άρα οδηγούνται στην απόλυση.

Εργοστάσιο Β: (1/140) * (21.000-x_{21}-x_{22}) = 0. Χρειάζονται και οι 150 εργάτες.

Αλλιώς..

Μπορώ να βρω τους εργάτες που χρειάστηκαν για να παραχθούν τα κομμάτια προϊόντων του βέλτιστου σημείου ως εξής:

(1/140) * (x_{11}+0,25x_{12}) = (1/140) * (9.000 + 15.000/4) ≈ 92 εργάτες

Άρα 150-92 = 58 εργάτες ήταν περιττοί.

Άσκηση 17

Ερώτημα 2)

- <u>Μετατροπή στο Δυαδικό</u>

$$
\left.\begin{array}{lr}
\bullet\ x_{11} + x_{12} & \geq 24.000 \\
\bullet\ -x_{11} & \geq -30.000 \\
\bullet\ -x_{12} & \geq -15.000 \\
\bullet\ -x_{11} - x_{12}/4 & \geq -21.000
\end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{l}
\Pi_1 - \cancelto{0}{\Pi_2} - \cancelto{0}{\Pi_4} \leq 1,5 \\
\Pi_1 - \Pi_3 - 0,25\cancelto{0}{\Pi_4} \leq -1,25
\end{array}
$$

$\Pi_1 = 1,50$
$\Pi_3 = 2,75$

$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4 \geq 0$

$$\max[u] = 24.000^* \, \Pi_1 - \cancelto{0}{30.000^* \, \Pi_2} - 15.000\, \Pi_3 - \cancelto{0}{21.000^* \, \Pi_4} + 135.000$$

$$\max[u] = -41.250 + 36.000 + 135.000 = 129.750\ €$$

* Οι περιορισμοί Π_2 και Π_4 είναι μη κορεσμένοι, για αυτό μηδενίζονται.

Άσκηση 17

Ερώτημα 3)

Μετατρέπουμε το γραμμικό πρόβλημα στην πρότυπη μορφή του με εισαγωγή μεταβλητής απόκλισης

$\min[z] = 1{,}5*x_{11} - 1{,}25*x_{12} + 135.000 + 0*S_1 + 0*S_2 + 0*S_3 + 0*S_4 + M*A$

- $x_{11} + S_1 = 30.000$
- $x_{12} + S_2 = 15.000$
- $x_{11} + 0{,}25*x_{12} + S_3 = 21.000$
- $x_{11} + x_{12} - S_4 + A = 24.000$

$x_{11}, x_{12} \geq 0$

$S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$

$A, M_1 \geq 0$

Βήμα 0

Βάση	X_{11}	X_{12}	S_1	S_2	S_3	S_4	A	Δεξί Μέλος
S_1	1	0	1	0	0	0	0	30.000
S_2	0	1	0	1	0	0	0	15.000
S_3	1	0,25	0	0	1	0	0	21.000
A	1	1	0	0	0	-1	1	24.000
C_j	1,5	-1,25	0	0	0	0	M	
$\vec{C_j}$	1,5-M	-1,25-M	0	0	0	M	0	Z=24.000M +135.000

Άσκηση 17

Ερώτημα 3)

Βήμα 1

Βάση	X_{11}	X_{12}	S_1	S_2	S_3	S_4	A	Δεξί Μέλος
S_1	1	0	1	0	0	0	0	30.000
X_{12}	0	1	0	1	0	0	0	15.000
S_3	1	0	0	-0.25	1	0	0	17.250
A	1	0	0	-1	0	-1	1	9.000
C_j	1,5	-1,25	0	0	0	0	M	
$\overrightarrow{C_j}$	1,5-M	0	0	1.25+M	0	M	0	Z=9.000M+ 116.250

Βήμα 2

Βάση	X_{11}	X_{12}	S_1	S_2	S_3	S_4	A	Δεξί Μέλος
S_1	0	0	1	1	0	1	-1	21.000
X_{12}	0	1	0	1	0	0	0	15.000
S_3	0	0	0	0.75	1	1	-1	8.250
X_{11}	1	0	0	-1	0	-1	1	9.000
C_j	1,5	-1,25	0	0	0	0	M	
$\overrightarrow{C_j}$	0	0	0	2.75	0	1.5	0	Z=129.750

Άσκηση 17

Ερώτημα 4)

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραδοχή για το κόστος ως περιορισμό και το στόχο του προβλήματος, για την ελαχιστοποίηση της ανεργίας, ως αντικειμενική συνάρτηση.

Συγκεκριμένα ως περιορισμό θέτουμε:
$Z' \leq 129.750*1,10$
$5*x_{11} + 3*x_{12}/4 + 3,5*x_{21} + 2*x_{22} \leq 142.725$

Από τις παρακάτω εξισώσεις, ορίζουμε ως αντικειμενική συνάρτηση το άθροισμα τους, που εκφράζει τις συνολικές απολύσεις και των δύο εργοστασίων και προσπαθούμε να την ελαχιστοποιήσουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\quad 21.000 - (x_{11} / 1 + x_{12} / 4) \\ \bullet\quad 21.000 - (x_{21} / 1 + x_{22} / 1) \end{array}\right\}^{+} \; 42.000 - (x_{11} /1 + x_{12} /4 + x_{21} /1 + x_{22} /1)$$

Άρα η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται ως εξής:

$\min[z] = 42.000 - (x_{11} /1 + x_{12} /4 + x_{21} /1 + x_{22} /1)$

$\max[z] =(x_{11} /1 + x_{12} /4 + x_{21} /1 + x_{22} /1)$

Όπου η μορφή της τελευταίας εξισωσης εκφράζει την μεγιστοποίηση της απασχόλησης.

Άσκηση 17

Ερώτημα 4)

Συνολικά το τελικό πρόβλημα διαμορφώνεται:

max Z: $Z = x_{11} + 0.25*x_{12} + x_{21} + x_{22}$

Subject to:

$x_{11} + x_{21} = 30.000$

$x_{12} + x_{22} = 15.000$

$x_{11} + 0.25*x_{12} <= 21.000$

$x_{21} + x_{22} <= 21.000$

$5*x_{11} + 0.75*x_{12} + 3.5*x_{21} + 2*x_{22} <= 142.725$

Με λύση την:

Z= 37.288,64 ανθρωποώρες/μήνα = 267 εργάτες

X_{11}= 13.718,18

X_{12}= 10.281,81

X_{21}= 16.281,81

X_{22}= 4.718,18

Ο αριθμός απολύσεων μειώνεται σε 33 έναντι των 58 του αρχικού προβλήματος.

Άσκηση 18

Μια εταιρεία ηλεκτρονικών διαθέτει μια γραμμή παραγωγής στην οποία παράγει τα προϊόντα ΗΛ1 και ΗΛ2. Κάθε μέρα η γραμμή παραγωγής της εταιρείας αφιερώνεται αποκλειστικά στην παραγωγή ενός από τα δύο προϊόντα ΗΛ1 και ΗΛ2 με ημερήσια δυναμικότητα 150 και 250 τεμάχια αντίστοιχα.

Το τμήμα εμπορίας της εταιρείας εκτιμά ότι η ζήτηση ΗΛ1 για το επόμενο τρίμηνο είναι τουλάχιστον 2.000 τεμάχια, ενώ η ζήτηση ΗΛ2 το πολύ 7.000 τεμάχια. Για την παραγωγή των προϊόντων ΗΛ1 και ΗΛ2 που θα πουληθούν στο επόμενο τρίμηνο υπάρχουν διαθέσιμες 60 μέρες της γραμμής παραγωγής.

Το κόστος παραγωγής ενός τεμαχίου ΗΛ1 είναι 9 Ευρώ, ενώ το κόστος παραγωγής ενός τεμαχίου ΗΛ2 είναι 14 Ευρώ. Η τιμή πώλησης ενός τεμαχίου ΗΛ1 είναι 12 Ευρώ, ενώ η τιμή πώλησης ενός τεμαχίου ΗΛ2 είναι 18 Ευρώ.

Στον τριμηνιαίο προϋπολογισμό της εταιρείας το διαθέσιμο ποσό για την παραγωγή των προϊόντων ΗΛ1 και ΗΛ2 δεν μπορεί να υπερβεί τα 126.000 Ευρώ.

Άσκηση 18

Ερώτημα 1ο :

Να διατυπωθεί και επιλυθεί το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού της εταιρείας που εντοπίζει την βέλτιστη τριμηνιαία παραγωγή των προϊόντων ΗΛ1 και ΗΛ2.

Ερώτημα 2ο :

Να βρεθούν τα όρια μεταβολής της τιμής πώλησης ενός τεμαχίου ΗΛ1 έτσι ώστε να μην μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση του προηγούμενου Ερωτήματος.

Ερώτημα 3ο :

Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα, να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση του και να δοθεί η οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

Άσκηση 18

Ερώτημα 1ο

➢ Μεταβλητές Απόφασης

Έστω:

x_1 : αριθμός τεμαχίων που παρήχθησαν από το προιόν ΗΛ1

x_2 : αριθμός τεμαχίων που παρήχθησαν από το προιόν ΗΛ2

➢ Περιορισμοί

Μέγιστος συνολικός αριθμός ημερών: $x_1 / 150 + x_2 / 250 \leq 60$ (I)

Μέγιστο Κόστος Παραγωγής: $9 * x_1 + 14 * x_2 \leq 126.000$ (II)

Ελάχιστη Ζήτηση για το ΗΛ1: $x_1 \geq 2.000$ (III)

Μέγιστη Ζήτηση για το ΗΛ2: $x_2 \leq 7.000$ (IV)

* $x_1, x_2 \geq 0$

➢ Αντικειμενική Συνάρτηση

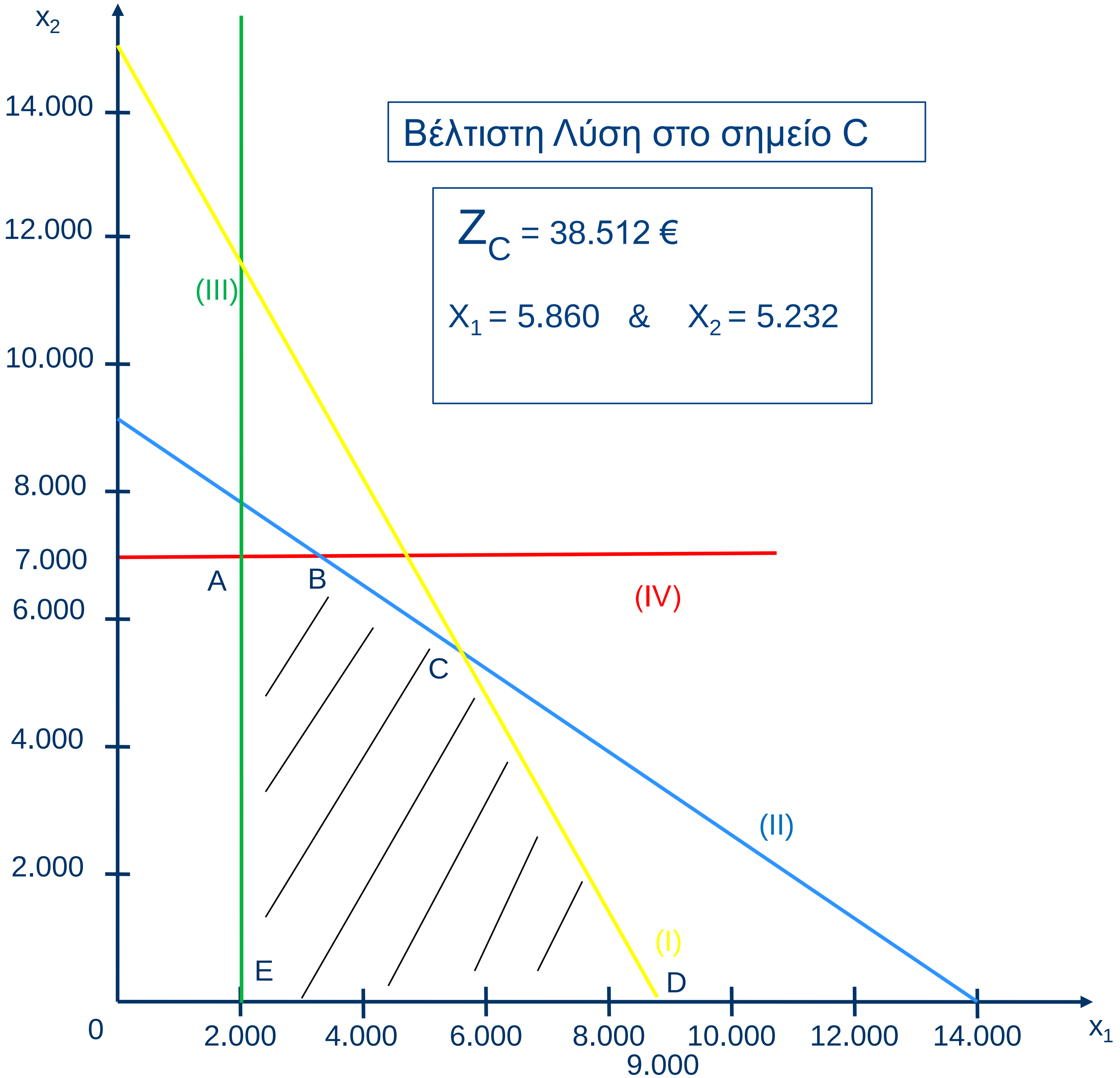
Ημερήσια Κέρδη Εταιρείας
Από κάθε προιόν:
12-9 = 3
18-14 = 4

Προγραμματισμός παραγωγής που μεγιστοποιεί το κέρδος:

$$\max[z] = 3x_1 + 4x_2 \ (€)$$

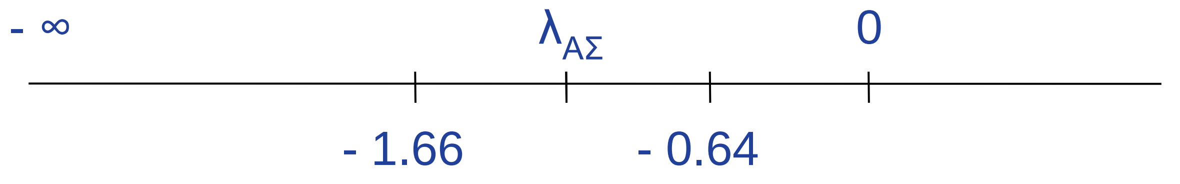
Άσκηση 18

Ερώτημα 1ο



Άσκηση 18

Ερώτημα 2ο



$\lambda_{I} = - 250 / 150 = -1.66$

$\lambda_{II} = -9 / 14 = - 0,64$

$\lambda_{III} = -\infty$

$\lambda_{IV} = 0$

$\lambda_{Α\Sigma} = -3 / 4 = - x_1 / 4 = - (c_1 – 9) / 4$

$$-1,66 \leq \lambda_{Α\Sigma} \leq -0,64$$

$$-1,66 \leq - (c_1 – 9) / 4 \leq - 0,64$$

$-1,66 \leq - (c_1 - 9) / 4$

$- 6,64 \leq - (c_1 - 9)$

$c_1 – 9 \leq 6.64$

$\boxed{c_1 \leq 15,64}$

$- (c_1 - 9) / 4 \leq - 0,64$

$- (c_1 - 9) \leq - 2,56$

$- c_1 \leq - 11,56$

$\boxed{c_1 \geq - 11,56}$

Άσκηση 18

Ερώτημα 3ο

- Περιορισμοί

$$\begin{array}{ll} x_1/150 + x_2/250 \leq 60 & \Pi_1 \\ 9 * x_1 + 14 * x_2 \leq 126.000 & \Pi_2 \\ x_1 \geq 2.000 & \Pi_3 \\ x_2 \leq 7.000 & \Pi_4 \end{array}$$

$\boxed{\max[z] = 3x_1 + 4x_2 \ (€)}$

- Μετατροπή στο Δυαδικό

$$\left.\begin{array}{l} x_1/150 + x_2/250 \leq 60 \\ 9\,x_1 + 14\,x_2 \leq 126.000 \\ -x_1 \leq -2.000 \\ x_2 \leq 7.000 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1/150\,\Pi_1 + 9\,\Pi_2 - \Pi_3 \geq 3 \\ 1/250\,\Pi_1 + 14\,\Pi_2 + \Pi_4 \geq 4 \\ \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4 \geq 0 \end{array}$$

$\boxed{\min[u] = 60\,\Pi_1 + 126.000\,\Pi_2 - 2.000\,\Pi_3 + 7.000\,\Pi_4}$

$\Pi_3 = \Pi_4 = 0 \qquad \Pi_1 \approx 105,260 \quad \Pi_2 \approx 0,255$

$u = 38.512$