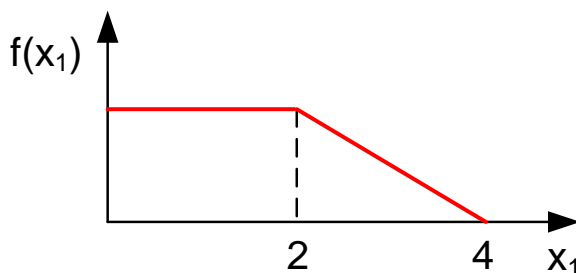


Επαναληπτική Άσκηση - Προσομοίωση

Ένας γεωργός σκέφτεται να ξεκινήσει να καλλιεργεί λαχανικά σε ένα χωράφι που του ανήκει. Η περιοχή έχει ασταθές κλίμα και το βραχώδες της περιοχής δυσχεραίνει το εγχείρημα. Η αρχική επένδυση που μπορεί να διαθέσει είναι 30.000 € για πέντε χρόνια. Κάθε χρόνο η ποσότητα λαχανικών που θα καταφέρει να παράγει (σε τόνους) περιγράφεται από την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:



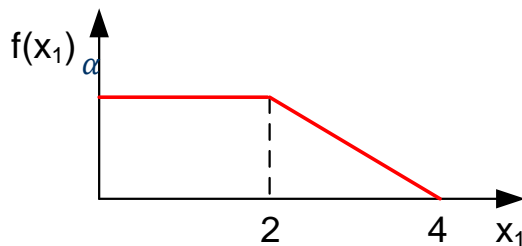
Εξαιτίας διαφόρων συνθηκών (χαλαζόπτωση, ασθένειες, έντομα, παράσιτα) ενδέχεται το προϊόν του να ανήκει στην ποιότητα Α, η οποία πωλείται για 5.000 €/τόνο και μπορεί να προκύψει με πιθανότητα 50%, Β, η οποία πωλείται για 4.000 €/τόνο και μπορεί να προκύψει με πιθανότητα 30% και Γ, η οποία πωλείται για 3.000 €/τόνο και μπορεί να προκύψει με 20%.

1. Να παράγετε τις συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας για την ποσότητα που παράγεται στο χωράφι κάθε χρόνο (x_1) και την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος (x_2).
2. Χρησιμοποιώντας τους τυχαίους αριθμούς 0.2, 0.8, 0.7, 0.6 και 0.4 για την ποσότητα λαχανικών που παράγεται κάθε χρόνο και τους τυχαίους αριθμούς 0.1, 0.6, 0.9, 0.7 και 0.3 για την αντίστοιχη κατηγορία ποιότητας των λαχανικών για αυτές τις πέντε χρονιές να υπολογίσετε εάν ο γεωργός θα έχει κέρδος και αν ναι, πόσο.



Επαναληπτική Άσκηση - Προσομοίωση

Για την x_1 από την γραφική της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, έχουμε ότι το εμβαδόν είναι μονάδα. Άρα: $E = 1 \rightarrow \frac{4+2}{2} \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$



Έτσι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq x_1 \leq 2 \\ -\frac{1}{6}x_1 + \frac{4}{6}, & 2 < x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 4 \end{array} \right\} \quad y = a_1x + b_1 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -4a_1$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \quad y = a_1x + b_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{6}$$

$$b_1 = \frac{4}{6}$$



Επαναληπτική Άσκηση - Προσομοίωση

Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε την **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας**:

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t) dt$$

- Πρώτος Κλάδος

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(t) dt = \int_0^{x_1} f(t) dt = \int_0^{x_1} \frac{1}{3} dt = \left[\frac{1}{3} t \right]_0^{x_1} = \frac{x_1}{3}$$

- Δεύτερος Κλάδος

Προσοχή: Συμπεριλαμβάνουμε και το ολοκλήρωμα του πρώτου κλάδου

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_1} f(t) dt &= \int_0^2 f(t) dt + \int_2^{x_1} f(t) dt = \frac{2}{3} + \int_2^{x_1} -\frac{1}{6} t + \frac{4}{6} dt = \\ &= \frac{2}{3} + \left[-\frac{1}{6} \frac{t^2}{2} + \frac{4}{6} t \right]_2^{x_1} = \frac{-x_1^2 + 8x_1 - 4}{12} \end{aligned}$$

Άρα

$$F(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1}{3}, & 0 \leq x_1 \leq 2 \\ \frac{-x_1^2 + 8x_1 - 4}{12}, & 2 < x_1 \leq 4 \end{cases}$$



Επαναληπτική Άσκηση - Προσομοίωση

Θέτω $R_1 = F(x_1)$

- Πρώτος Κλάδος

$$F(x_1) = \frac{x_1}{3} = R_1 \rightarrow x_1 = 3R_1$$

Όπου $0 \leq x_1 \leq 2 \rightarrow 0 \leq 3R_1 \leq 2 \rightarrow 0 \leq R_1 \leq \frac{2}{3}$

- Δεύτερος Κλάδος

$$F(x_1) = \frac{-x_1^2 + 8x_1 - 4}{12} = R_1 \rightarrow$$

$$-x_1^2 + 8x_1 - 4 - 12R_1 = 0 \rightarrow x_1 = 4 \pm \sqrt{12 - 12R_1}$$

Διαλέγω το «-». Γιατί?

Όπου $2 \leq x_1 \leq 4 \rightarrow 2 \leq 4 - \sqrt{12 - 12R_1} \leq 4 \rightarrow \frac{2}{3} < R_1 \leq 1$

Άρα

$$R_1 = F(x_1) \rightarrow x_1 = \begin{cases} 3R_1, & 0 \leq R_1 \leq \frac{2}{3} \\ 4 - \sqrt{12 - 12R_1}, & \frac{2}{3} < R_1 \leq 1 \end{cases}$$

Οπότε για τους τυχαίους αριθμούς που μας δόθηκαν, έχουμε τα παρακάτω τυχαία δείγματα:

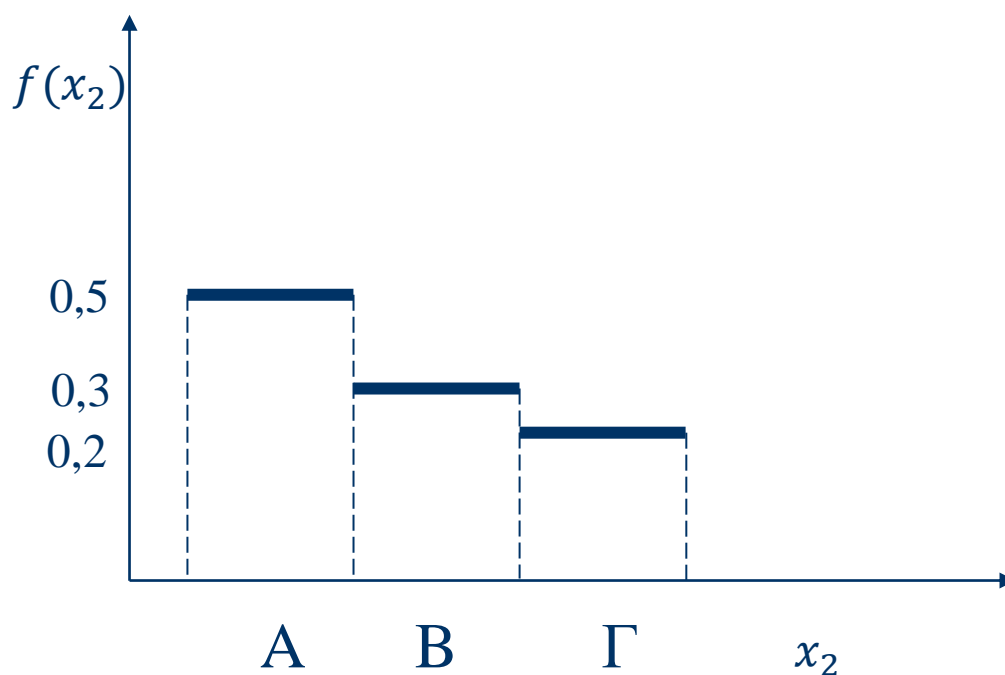


Επαναληπτική Άσκηση - Προσομοίωση

Οπότε για τους τυχαίους αριθμούς που μας δόθηκαν, έχουμε τα παρακάτω τυχαία δείγματα:

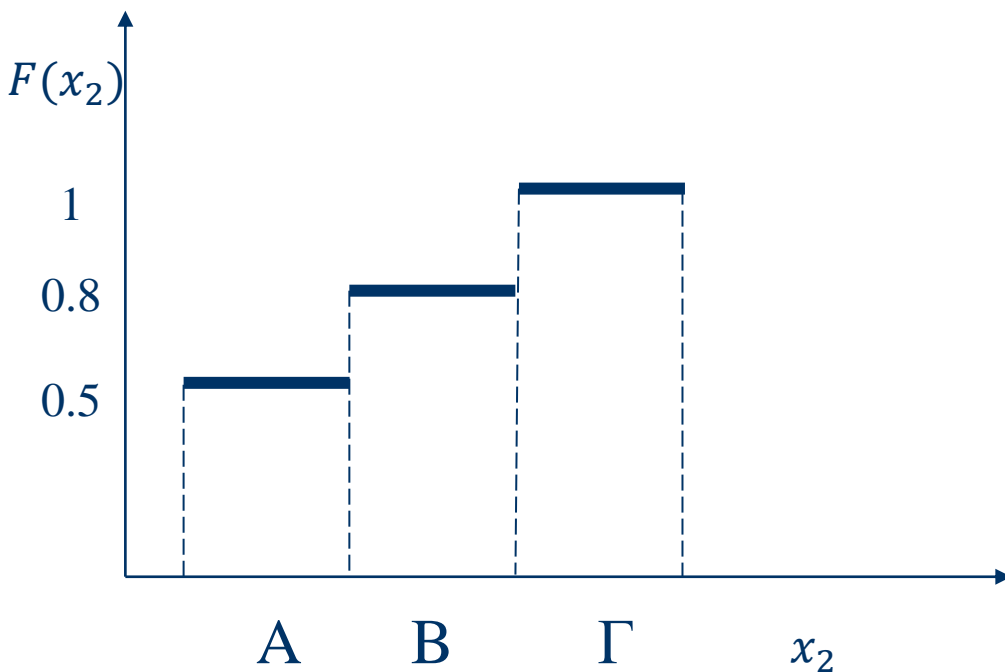
R_1	X_1
0.2	0.6
0.8	2.450807
0.7	2.102633
0.6	1.8
0.4	1.2

Για την x_2 έχουμε την παρακάτω γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας:



Επαναληπτική Άσκηση - Προσομοίωση

Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε την **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας**:



Οπότε από την γραφική παράσταση έχω:

$$x_2 = \begin{cases} 5000 \text{ €/τόνο}, & 0 \leq R_2 < 0.5 \\ 4000 \text{ €/τόνο}, & 0.5 \leq R_2 < 0.8 \\ 3000 \text{ €/τόνο}, & 0.8 \leq R_2 < 1 \end{cases}$$



Επαναληπτική Άσκηση - Προσομοίωση

Οπότε για τους τυχαίους αριθμούς που μας δόθηκαν, έχουμε τα παρακάτω τυχαία δείγματα:

R_2	X_2
0.1	5000
0.6	4000
0.9	3000
0.7	4000
0.3	5000

Συνολικά έχουμε:

R_1	X_1	R_2	X_2	Έσοδα
0.2	0.6	0.1	5000	3000
0.8	2.450807	0.6	4000	9803.227
0.7	2.102633	0.9	3000	6307.9
0.6	1.8	0.7	4000	7200
0.4	1.2	0.3	5000	6000
Σύνολο				32311.13

Το κέρδος του γεωργού ανέρχεται στα **2311.13 €**

