Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Ηλεκτρικων Βιομηχανικων Διαταξεων και Συστηματων Αποφασεων
Εργαστηριο Συστηματων Αποφασεων και Διοικησης

Ενοτητα 11: Αναλυτικη-Συνθετικη Προσεγγιση - Η Μεθοδος UTASTAR

Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Αλέξανδρος Νίκας, Χάρης Δούκας, Ιωάννης Ψαρράς

Σκοπος & Μεθοδοι

- **Σκοπός της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης**

Οι μέθοδοι αυτής της προσέγγισης υποθέτουν ότι απόφαση και κριτήρια υπόκεινται σε προοδευτική επεξεργασία, καθώς η σχέση τους είναι αμφίδρομη, και εστιάζουν στην συσχέτιση των πραγματικών δεδομένων και του μοντέλου απόφασης, έτσι ώστε το μοντέλο να πλησιάζει όσο καλύτερα γίνεται τις προτιμήσεις των αποφασιζόντων. Ουσιαστικά, στην προσέγγιση αυτή εκτιμώνται οι παράμετροι εκείνες ενός μοντέλου απόφασης που επιτρέπουν τη βέλτιστη ανασύσταση μίας απόφασης.

- **Συνήθεις μέθοδοι**
  - UTA (UTilités Additives)
  - UTASTAR
  - UTADIS (UTilités Additives DIScriminantes)

Προϋποθεσεις

- **Επαναληπτικός χαρακτήρας**

Το αποτέλεσμα μίας απόφασης μπορεί να παρατηρηθεί/εξωτερικευθεί από τους αποφασίζοντες μέσα από τον διάλογο. Μόλις το μοντέλο απόφασης (ή προτιμησιακό μοντέλο) προσδιοριστεί, ο απώτερος σκοπός είναι να επεκταθεί στο σύνολο ***A*** των εναλλακτικών δράσεων του προβλήματος που αναλυτής και αποφασίζοντες καλούνται να επιλύσουν. Σε περίπτωση ασυνέπειας μεταξύ μοντέλου και αποφασιζόντων, οφείλει να αναθεωρηθεί η οικογένεια κριτηρίων ή η αξιοπιστία των δεδομένων.

- **Δράσεις αναφοράς**

Για την αποσαφήνιση της ολικής προτίμησης, οφείλει να υπάρχει ένα σύνολο δράσεων αναφοράς $\boldsymbol{A_R}$, το οποίο μπορεί να είναι ένα σύνολο από προγενέστερες δράσεις, ένα υποσύνολο των πραγματικών δράσεων του προβλήματος, ή ένα σύνολο εικονικών δράσεων που οι αποφασίζοντες δύνανται να αξιολογήσουν. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, απαιτείται η επιβεβαίωση των ολικών προτιμήσεων.

Η Οικογενεια Μεθοδων UTA

Πλαίσιο

Η μέθοδος UTA σηματοδότησε την εισαγωγή της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης ως ρεύμα της πολυκριτήριας ανάλυσης και στοχεύει στην επαγωγή μίας ή περισσότερων προσθετικών συναρτήσεων αξίας από μία προδιάταξη ενός συνόλου αναφοράς $\boldsymbol{A_R}$. Για τον καθορισμό των συναρτήσεων αυτών, χρησιμοποιούνται ειδικές τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού έτσι ώστε η κατάταξη που αποκτάται μέσω των συναρτήσεων να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στην αρχική προδιάταξη.

Το μοντέλο σύνθεσης κριτηρίων της μεθόδου UTA βασίζεται σε μία προσθετική συνάρτηση αξίας της μορφής:

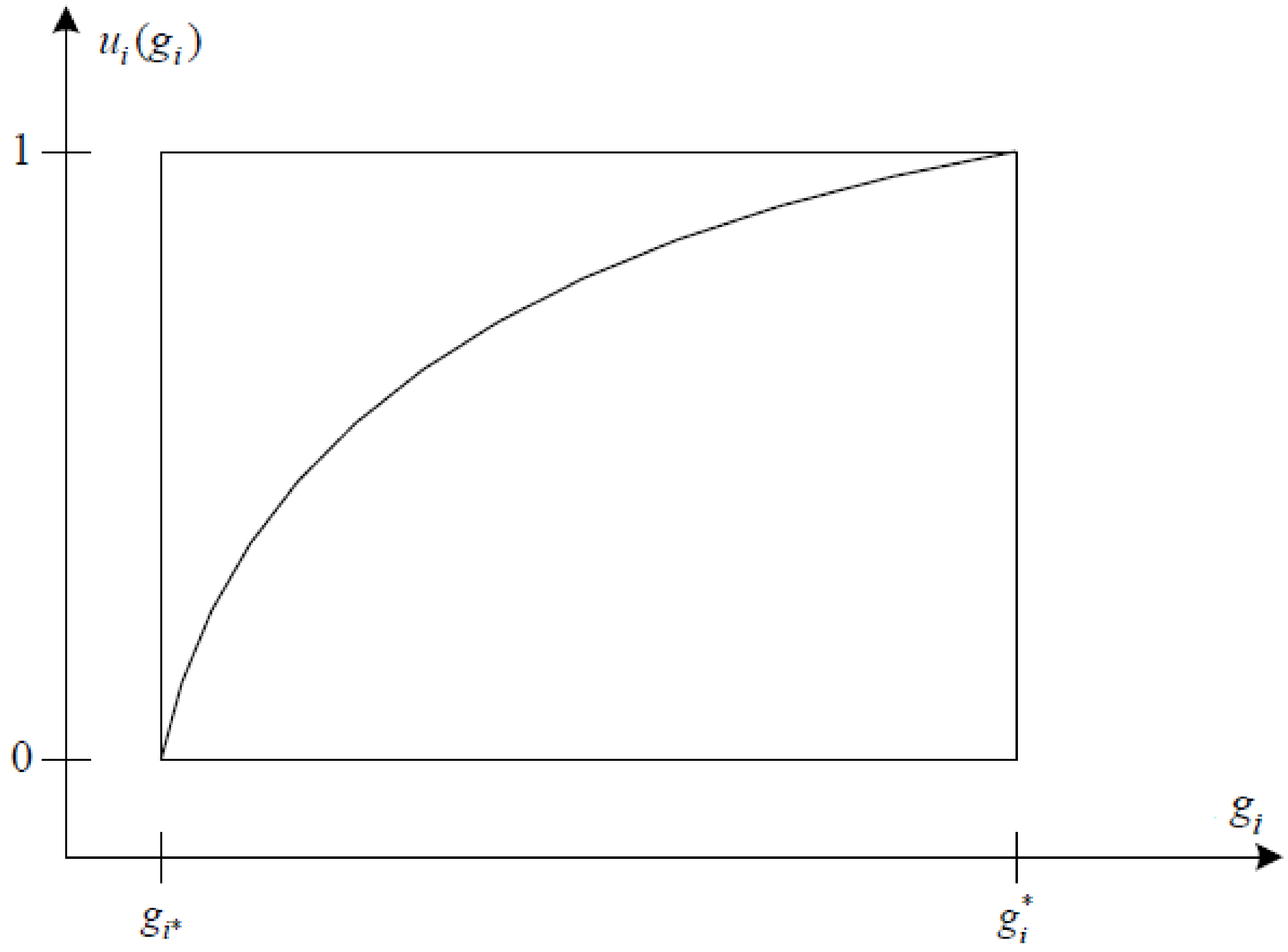
$$u(\boldsymbol{g}) = \sum_{1}^{n} p_i \cdot u_i(g_i)$$

που υπόκειται στους εξής περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} p_i = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0, \quad u_i(g_i^{*}) = 1 \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

όπου u_i αύξουσες συναρτήσεις των g_i, και καλούνται οριακές ή μερικές συναρτήσεις αξίας, οι οποίες κανονικοποιούνται μεταξύ των τιμών 0 και 1, ενώ $p_i \geq 0$ είναι ο συντελεστής βαρύτητας του u_i, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Οριακες Συναρτησεις Αξιας UTA



Το μοντέλο Απόφασης UTA

Συγκεκριμένα, το μοντέλο απόφασης της μεθόδου UTA αποτελείται από μία μορφή προσθετικής συνάρτησης αξίας χωρίς συντελεστές βαρύτητας (αστάθμητη), της μορφής:

$$u(g) = \sum_{1}^{n} u_i(g_i)$$

καθώς και τους περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0 \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

όπου u_i είναι αύξουσες συναρτήσεις των g_i, οι οριακές συναρτήσεις αξίας.

Αποδεικνύεται ότι η αυτή η τελευταία αστάθμητη μορφή u είναι αυστηρά ισοδύναμη της σταθμισμένης, έστω u', αρκεί να θέσουμε $u_i = p_i \cdot u_i'$, καθώς και $p_i = u_i(g_i^*)$.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΗΣ UTA

Φυσικά, η ύπαρξη ενός τέτοιου προτιμησιακού μοντέλου προϋποθέτει την προτιμησιακή ανεξαρτησία των κριτηρίων για τους αποφασίζοντες, και η ιδιότητα της συνέπειας ή μονοτονίας θα πρέπει να ισχύει τόσο για τις οριακές όσο και για την ολική συνάρτηση αξίας, στην περίπτωση της οποίας θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} u[g(a)] > u[g(b)] \Leftrightarrow a \succ b \text{ (preference)} \\ u[g(a)] = u[g(b)] \Leftrightarrow a \approx b \text{ (indifference)} \end{cases}$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις προτίμησης και το νέο προσθετικό μοντέλο της UTA, η αξία κάθε εναλλακτικής $a \in \boldsymbol{A_R}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$u'[\boldsymbol{g}(a)] = \sum_{1}^{n} u_i[g_i(a)] + \sigma(\alpha) \qquad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}$$

όπου το σ(α) αποτελεί ένα πιθανό σφάλμα σχετικό με το $u'[\boldsymbol{g}(a)]$.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Προκειμένου να υπολογιστούν οι αντίστοιχες οριακές συναρτήσεις αξίας σε μία τμηματικά γραμμική μορφή, προτάθηκε η χρήση της γραμμικής παρεμβολής, δηλαδή η διαίρεση του διαστήματος $[g_{i*}, g_i^{*}]$ για κάθε κριτήριο i σε $(a_i - 1)$ ίσα διαστήματα, ώστε τα τελικά σημεία g_i^j να υπολογίζονται από τον τύπο:

$$g_i^j = g_{i^*} + \frac{j-1}{a_i - 1}\left(g_i^{*} - g_{i^*}\right) \qquad \forall\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i$$

Η οριακή αξία κάθε εναλλακτικής α προσδιορίζεται με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής, έτσι ώστε για κάθε $g_i(a) \in [g_i^j, g_i^{j+1}]$, η οριακή αξία θα ισούται με:

$$u_i[g_i(a)] = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j}\left[u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)\right]$$

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

Για κάθε ζεύγος διαδοχικών δράσεων $\left(a_k, a_{k+1}\right)$ θα υπάρχει είτε σχέση προτίμησης, δηλαδή $a_k \succ a_{k+1}$, είτε σχέση αδιαφορίας, δηλαδή $a_k \approx a_{k+1}$.

Έτσι, αν θέσουμε την διαφορά των αξιών $\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = u'[\boldsymbol{g}(a_k)] - u'[\boldsymbol{g}(a_{k+1})]$:

$$\begin{cases} \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) \geq \delta & iff \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = 0 & iff \;\; a_k \approx a_{k+1} \end{cases}$$

όπου δ ένας μικρός θετικός αριθμός που διαχωρίζει σημαντικά δύο διαδοχικές κλάσεις ισοδυναμίας της προδιάταξης *R*.

Οι προτιμήσεις των αποφασιζόντων χαρακτηρίζονται από μονοτονία, άρα οι οριακές αξίες πρέπει να ικανοποιούν το σύνολο των περιορισμών:

$$\left[u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^{j})\right] \geq s_i \quad \forall\; i = 1, 2, \ldots n \quad \text{and} \quad \forall\; \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i - 1$$

όπου $s_i \geq 0$ είναι τα προαιρετικά κατώφλια αδιαφορίας κάθε κριτηρίου g_i.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Οι οριακές συναρτήσεις αξίας τελικά υπολογίζονται από το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, με τους προαναφερθέντες περιορισμούς και αντικειμενική συνάρτηση που εξαρτάται από το σφάλμα σ(α) που υποδεικνύει την συνολική απόκλιση:

$$
\begin{cases}
\min : F = \sum\limits_{a \in \boldsymbol{A_R}} \sigma(a) \\
s.t.: \\
\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) \geq \delta \quad if \ \ a_k \succ a_{k+1} \\
\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = 0 \quad if \ \ a_k \approx a_{k+1} \\
u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^{j}) \geq 0 \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots n \quad \text{and} \quad \forall\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i - 1 \\
\sum\limits_{1}^{n} u_i(g_i^{*}) = 1 \\
u_i(g_{i^*}) = 0, \quad u_i(g_i^{j}) \geq 0, \quad \sigma(\alpha) \geq 0 \quad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}, \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots n \quad \text{and} \quad \forall\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i
\end{cases}
$$

Ανάλυση Ευσταθειας Λυσης UTA

Η ανάλυση ευστάθειας του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού αποτελεί πρόβλημα ανάλυσης **μεταβελτιστοποίησης**. Εάν η λύση είναι F*=0, το υπερπολύεδρο των αποδεκτών λύσεων για τις συναρτήσεις αξίας δεν είναι κενό, αλλά υπάρχουν πολλαπλές συναρτήσεις αξίας που είναι απόλυτα συνεπείς με την προδιάταξη *R*.

Η διερεύνηση του πολυέδρου μπορεί να γίνει μέσω μίας ευρετικής μεθόδου αναζήτησης ημι-βέλτιστων λύσεων, ελαχιστοποιώντας και μεγιστοποιώντας κάθε φορά τα $u_i(g_i^*)$ στο πολύεδρο των περιορισμών, φραγμένο από τις ευθείες F=F* και F=F*+k(F*), όπου k(F*) είναι ένα θετικό (ή μηδενικό) κατώφλι, ως μικρό ποσοστό του σφάλματος F*.

Ως τελική λύση του προβλήματος, υπολογίζεται **η μέση τιμή των λύσεων** που είναι και αυτή ημι-βέλτιστη λόγω της κυρτότητας του πολυέδρου.

Ο βαθμός σύγκλισης των λύσεων εκφράζει και τον βαθμό ευστάθειας, ενώ οι λύσεις εκφράζουν τη διακύμανση των συντελεστών βαρύτητας των κριτηρίων g_i, δίνοντας και μία ιδέα της σημαντικότητας των κριτηρίων στο σύστημα προτιμήσεων των αποφασιζόντων.

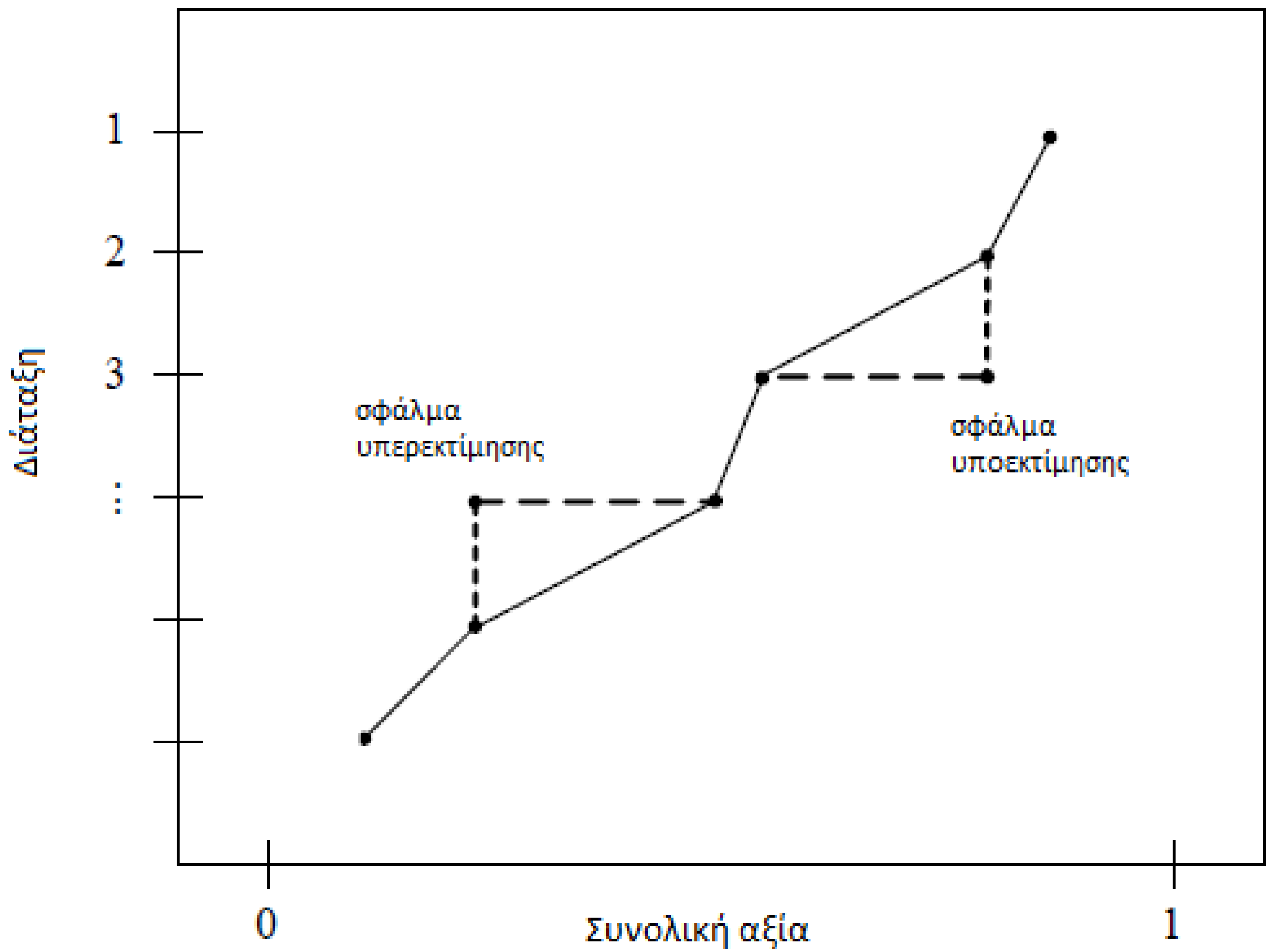
Η ΜΕΘΟΔΟΣ UTASTAR

Η μέθοδος UTASTAR αποτελεί μία βελτιωμένη εκδοχή του μοντέλου UTA, στην οποία κάθε εναλλακτική δράση $a \in \boldsymbol{A_R}$ σχετίζεται με ένα σφάλμα σ(α) προς ελαχιστοποίηση. Αυτή **η συνάρτηση σφάλματος, όμως, δεν επαρκεί για την ελαχιστοποίηση της ολικής διασποράς των σημείων γύρω από τη μονότονη καμπύλη της συνολικής αξίας**. Καθώς το σφάλμα αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, αντιστοιχεί σε όλα τα σημεία που βρίσκονται στα αριστερά της καμπύλης. Το πρόβλημα, δηλαδή, αφορά στα σημεία που βρίσκονται δεξιά της καμπύλης, από τα οποία θα ήταν προτιμότερο να αφαιρεθεί μία ποσότητα αξίας χωρίς να αυξηθούν οι αξίες των άλλων (διατακτική παλινδρόμηση).

Στην UTASTAR, εισάγεται μία διπλή θετική συνάρτηση σφάλματος, μία που να καλύπτει τα σημεία αριστερά της καμπύλης (**σφάλμα υπερεκτίμησης $\boldsymbol{\sigma^-}$**) και μία που να καλύπτει τα σημεία δεξιά της καμπύλης (**σφάλματα υποεκτίμησης $\boldsymbol{\sigma^+}$**), δηλαδή:

$$u'[g(a)] = \sum_{1}^{n} u_i[g_i(a)] - \sigma^+(\alpha) + \sigma^-(\alpha) \qquad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}$$

Τα Σφαλματα στην UTASTAR



Συνθήκες Μονοτονίας UTASTAR

Μία άλλη τροποποίηση που εισάγεται στην UTASTAR αφορά στους περιορισμούς μονοτονίας των κριτηρίων, οι οποίοι πλέον μοντελοποιούνται μέσω των ακόλουθων μετασχηματισμών των μεταβλητών:

$$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^{j}) \geq 0 \quad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}, \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots n \quad \text{and} \quad \forall\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i - 1$$

Έτσι, οι συνθήκες μονοτονίας μπορούν να αντικατασταθούν από περιορισμούς μη αρνητικότητας για τις μεταβλητές w_{ij} (για $s_{ij}=0$).

Βημα 1: Οριακες Αξιες

Η ολική αξία των δράσεων αναφοράς $u[\boldsymbol{g}(a_k)]$, k = 1, 2, ..., m, εκφράζεται πρώτα σε όρους οριακών αξιών $u_i(g_i)$, και κατόπιν σε όρους w_{ij}:

$$\begin{cases} u_i(g_i^{1}) = 0 & \forall\ i = 1, 2, \ldots n \\ u_i(g_i^{j}) = \sum_{t=1}^{t=j-1} w_{it} & \forall\ i = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

ΒΗΜΑ 2: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Εισάγονται δύο συναρτήσεις σφάλματος σ$^+$ και σ$^-$ στο σύνολο δράσεων αναφοράς $\boldsymbol{A_R}$, γράφοντας για κάθε ζεύγος διαδοχικών δράσεων στην προδιάταξη τις αναλυτικές εκφράσεις (σε μορφή διαφορών):

$$\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = \left\{u[\boldsymbol{g}(a_k)] - \sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)\right\} - \left\{u[\boldsymbol{g}(a_{k+1})] - \sigma^+(a_{k+1}) + \sigma^-(a_{k+1})\right\}$$

Βημα 3: Επιλυση Προβληματος ΓΠ

Επιλύεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{cases}
\min : z = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left[\sigma^{+}(a_k) + \sigma^{-}(a_k) \right] \\
s.t.: \\
\left.\begin{array}{l} \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) \geq \delta \quad if \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = 0 \quad if \;\; a_k \approx a_{k+1} \end{array}\right\} \forall k \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i - 1} w_{ij} = 1 \\
w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^{+}(a_k) \geq 0, \quad \sigma^{-}(a_k) \geq 0 \quad \forall \text{ i, j, k}
\end{cases}
$$

όπου δ είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Ελεγχος Συνεπειας

Η ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων και ο προσδιορισμός μηδενικής τιμής υποδηλώνει ότι η προδιάταξη των δράσεων αναφοράς που έδωσαν οι αποφασίζοντες **δεν φέρουν σφάλματα υποεκτίμησης ή υπερεκτίμησης**.

Τέτοια σφάλματα, σε περίπτωση που δεν είναι μηδενικά, υποδηλώνουν ότι η προδιάταξη που έχει δοθεί από τους αποφασίζοντες **φέρει ασυνέπειες**, οι οποίες την καθιστούν ασύμβατη με κάποιο (οποιοδήποτε) προτιμησιακό μοντέλο.

Σε αυτή την περίπτωση, ο αναλυτής οφείλει να ζητήσει από τους αποφασίζοντες να **επανεκτιμήσουν** τις απαντήσεις τους σχετικά με την προδιάταξη που θα δοθεί στο σύνολο εναλλακτικών δράσεων αναφοράς.

ΒΗΜΑ 4: ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ελέγχεται η ύπαρξη πολλαπλών ημι-βέλτιστων λύσεων στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, υπολογίζοντας το βαρύκεντρο των προσθετικών συναρτήσεων αξίας που μεγιστοποιούν τις:

$$u_i(g_i^*) = \sum_{j=1}^{a_i-1} w_{ij} \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots n$$

στο υπερπολύεδρο των περιορισμών του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού που περιορίζεται από τον νέο περιορισμό:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k) \right] \leq z^* + \varepsilon$$

όπου z^* είναι η βέλτιστη τιμή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, ενώ ***ε*** είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σκοπος Εφαρμογης

Αξιολόγηση εναλλακτικών μέσων μεταφοράς στον εργασιακό χώρο

Η Βασιλική, απόφοιτος της ΣΗΜΜΥ, με μεταπτυχιακό δίπλωμα στα Τεχνοοικονομικά Συστήματα, μετακόμισε στο Παρίσι, όπου και βρήκε εργασία σε ένα μεγάλο ερευνητικό κέντρο. Ωστόσο, το σπίτι της απέχει μακριά, υπάρχουν δεκάδες διαφορετικοί τρόποι μετακίνησης, και εκείνη μπορεί να αξιολογήσει μόνο ένα υποσύνολο αυτών.

Έτσι, αποφασίζει να επιλέξει αυτό το υποσύνολο εναλλακτικών, οι οποίες περιλαμβάνουν το RER, δύο διαφορετικά δρομολόγια του Μετρό, ένα λεωφορείο και ταξί, και να τις αξιολογήσει με βάση το κόστος, τον χρόνο και την άνεση. Με βάση την ανάλυση του προτιμησιακού της μοντέλου, ευελπιστεί να μπορέσει να αξιολογήσει όλους τους τρόπους μετακίνησης

Χαρακτηριστικά προβλήματος

Δεκάδες εναλλακτικές με αδυναμία διάταξης ή/και διαμόρφωσης μοντέλου προτίμησης

5 εναλλακτικές αναφοράς

3 κριτήρια αξιολόγησης

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

	Κριτήρια			
Μέσο (εναλλακτικές)	**Τιμή (€)**	**Χρόνος (min)**	**Άνεση**	**Κατάταξη**
RER	3	10	+	1
ΜΕΤΡΟ1	4	20	++	2
ΜΕΤΡΟ2	2	20	0	2
ΛΕΩΦΟΡΕΙΟ	6	40	0	3
ΤΑΞΙ	30	30	+++	4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έκφραση Συναρτήσεων Αξίας (1/3)

Αρχικά, εκφράζουμε τις αξίες των εναλλακτικών, βάσει των κλιμάκων των τριών κριτηρίων:

$$\left[g_{1*}, g_1^*\right] = [30, 16, 2]$$

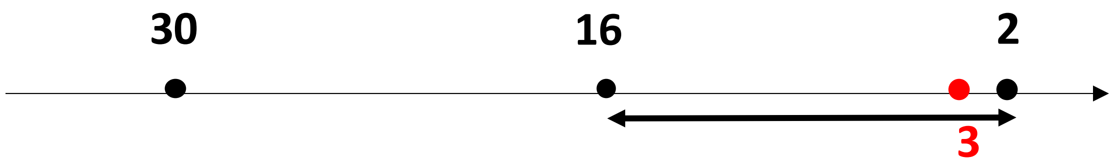
$$\left[g_{2*}, g_2^*\right] = [40, 30, 20, 10]$$

$$\left[g_{3*}, g_3^*\right] = [0, +, ++, +++]$$

Έπειτα, εκφράζουμε τις συναρτήσεις αξίας των εναλλακτικών. Για παράδειγμα, και με χρήση της μεθόδου γραμμικής παρεμβολής για το $\mathbf{g_1}$:

$$u\left[\mathbf{g}(RER)\right] = \frac{3-2}{16-2}u_1(16) + \frac{16-3}{16-2}u_1(2) + u_2(10) + u_3(+)$$

$$= 0.07u_1(16) + 0.93u_1(2) + u_2(10) + u_3(+)$$



TIP: σε ποιο άκρο του τμήματος βρίσκεται πιο κοντά το σημείο;

Εκφραση Συναρτησεων Αξιας (2/3)

Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε το σύνολο των συναρτήσεων αξίας (αναφοράς) των εναλλακτικών:

$$u\left[\mathbf{g}\left(RER\right)\right] = 0.07u_1(16) + 0.93u_1(2) + u_2(10) + u_3(+)$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\mathrm{METPO1}\right)\right] = 0.14u_1(16) + 0.86u_1(2) + u_2(20) + u_3(++)$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\mathrm{METPO2}\right)\right] = u_1(2) + u_2(20) + u_3(0)$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\Lambda\mathrm{E}\Omega\Phi\right)\right] = 0.29u_1(16) + 0.71u_1(2) + u_2(40) + u_3(0)$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\mathrm{TA}\Xi\mathrm{I}\right)\right] = u_1(30) + u_2(30) + u_3(+++)$$

ΕΚΦΡΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΑΞΙΑΣ (3/3)

Και συναρτήσει των w_{ij}:

$$u\left[\mathbf{g}\left(RER\right)\right] = w_{11} + 0.93w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{31}$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΜΕΤΡΟ1}\right)\right] = w_{11} + 0.86w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{31} + w_{32}$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΜΕΤΡΟ2}\right)\right] = w_{11} + w_{12} + w_{21} + w_{22}$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΛΕΩΦ}\right)\right] = w_{11} + 0.71w_{12}$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΤΑΞΙ}\right)\right] = w_{21} + w_{31} + w_{32} + w_{33}$$

TIP: για κάθε ένα οριακό τμήμα που συμπληρώνουμε προστίθεται και ένα w_{ij}, και εν τέλει για το ποσοστό του οριακού τμήματος που συμπληρώνεται προστίθεται ίδιο ποσοστό του αντίστοιχου w_{ij}.

Εκφραση Διαφορων

Έπειτα εκφράζουμε τις διαφορές των διαδοχικών δράσεων:

$$\Delta\left(RER, \mathrm{METPO1}\right) = 0.07w_{12} + w_{23} + w_{31} - w_{32} - \sigma^{+}{}_{RER} + \sigma^{-}{}_{RER} + \sigma^{+}{}_{\mathrm{M1}} - \sigma^{-}{}_{\mathrm{M1}}$$

$$\Delta\left(\mathrm{METPO1}, \mathrm{METPO2}\right) = -0.14w_{12} + w_{31} + w_{32} - \sigma^{+}{}_{\mathrm{M1}} + \sigma^{-}{}_{\mathrm{M1}} + \sigma^{+}{}_{\mathrm{M2}} - \sigma^{-}{}_{\mathrm{M2}}$$

$$\Delta\left(\mathrm{METPO2}, \Lambda\mathrm{E}\Omega\Phi\right) = 0.29w_{12} + w_{21} + w_{22} - \sigma^{+}{}_{\mathrm{M2}} + \sigma^{-}{}_{\mathrm{M2}} + \sigma^{+}{}_{\Lambda\mathrm{E}\Omega\Phi} - \sigma^{-}{}_{\Lambda\mathrm{E}\Omega\Phi}$$

$$\Delta\left(\Lambda\mathrm{E}\Omega\Phi, \mathrm{TA}\Xi\mathrm{I}\right) = w_{11} + 0.71w_{12} - w_{21} - w_{31} - w_{32} - w_{33} - \sigma^{+}{}_{\Lambda\mathrm{E}\Omega\Phi} + \sigma^{-}{}_{\Lambda\mathrm{E}\Omega\Phi} + \sigma^{+}{}_{\mathrm{TA}\Xi\mathrm{I}} - \sigma^{-}{}_{\mathrm{TA}\Xi\mathrm{I}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μοντελοποιηση Προβληματος (1/3)

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις υπεροχής και αδιαφορίας που έθεσε η Βασιλική, αλλά και προτίμηση ύψους δ=0.05, σχηματίζουμε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$
\begin{cases}
\min : z = \sum_{k=1}^{m} \left[\sigma^{+}(a_k) + \sigma^{-}(a_k) \right] \\
s.t.: \\
\left.\begin{array}{l}
\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) \geq 0.05 \quad if \;\; a_k \;\square\; a_{k+1} \\
\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = 0 \quad if \;\; a_k \approx a_{k+1}
\end{array}\right\} \forall k \\
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i - 1} w_{ij} = 1 \\
w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^{+}(a_k) \geq 0, \quad \sigma^{-}(a_k) \geq 0 \quad \forall \text{ i, j, k}
\end{cases}
$$

Μοντελοποιηση Προβληματος (2/3)

Δηλαδή:

$$\begin{cases}
\min : z = \sigma^{+}_{RER} + \sigma^{+}_{\mathrm{M1}} + \sigma^{+}_{\mathrm{M2}} + \sigma^{+}_{\mathrm{ΛΕΩΦ}} + \sigma^{+}_{\mathrm{ΤΑΞΙ}} + \sigma^{-}_{RER} + \sigma^{-}_{\mathrm{M1}} + \sigma^{-}_{\mathrm{M2}} + \sigma^{-}_{\mathrm{ΛΕΩΦ}} + \sigma^{-}_{\mathrm{ΤΑΞΙ}} \\
s.t.: \\
0.07w_{12} + w_{23} - w_{32} - \sigma^{+}_{RER} + \sigma^{-}_{RER} + \sigma^{+}_{\mathrm{M1}} - \sigma^{-}_{\mathrm{M1}} \geq 0.05 \\
-0.14w_{12} + w_{31} + w_{32} - \sigma^{+}_{\mathrm{M1}} + \sigma^{-}_{\mathrm{M1}} + \sigma^{+}_{\mathrm{M2}} - \sigma^{-}_{\mathrm{M2}} = 0 \\
0.29w_{12} + w_{21} + w_{22} - \sigma^{+}_{\mathrm{M2}} + \sigma^{-}_{\mathrm{M2}} + \sigma^{+}_{\mathrm{ΛΕΩΦ}} - \sigma^{-}_{\mathrm{ΛΕΩΦ}} \geq 0.05 \\
w_{11} + 0.71w_{12} - w_{21} - w_{31} - w_{32} - w_{33} - \sigma^{+}_{\mathrm{ΛΕΩΦ}} + \sigma^{-}_{\mathrm{ΛΕΩΦ}} + \sigma^{+}_{\mathrm{ΤΑΞΙ}} - \sigma^{-}_{\mathrm{ΤΑΞΙ}} \geq 0.05 \\
w_{11} + w_{12} + w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{31} + w_{32} + w_{33} = 1 \\
w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^{+}(a_k) \geq 0, \quad \sigma^{-}(a_k) \geq 0 \quad \forall \text{ i, j, k}
\end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μοντελοποιηση Προβληματος (3/3)

Ο πίνακας συντελεστών του προβλήματος θα είναι ο ακόλουθος:

w_{11}	w_{12}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{31}	w_{32}	w_{33}	σ^{+}_{RER}	σ^{-}_{RER}	σ^{+}_{M1}	σ^{-}_{M1}	σ^{+}_{M2}	σ^{-}_{M2}	$\sigma^{+}_{ΛΕΩΦ}$	$\sigma^{-}_{ΛΕΩΦ}$	$\sigma^{+}_{ΤΑΞΙ}$	$\sigma^{-}_{ΤΑΞΙ}$		
0	0.07	0	0	1	0	-1	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	>=	0.05
0	-0.14	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	0	0	=	0
0	0.29	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	0	0	>=	0.05
1	0.71	-1	0	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	>=	0.05
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$_{min}z$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Επιλύοντας το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με έναν LP solver, π.χ. GAMS ή LPSOLVE, υπολογίζονται οι εξής λύσεις:

$w_{11} = 0.5$

$w_{12} = 0$

$w_{21} = 0.05$

$w_{22} = 0$

$w_{23} = 0.05$

$w_{31} = 0$

$w_{32} = 0$

$w_{33} = 0.4$

$$u\left[\mathbf{g}\left(RER\right)\right] = 0.6$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΜΕΤΡΟ1}\right)\right] = 0.55$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΜΕΤΡΟ2}\right)\right] = 0.55$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΛΕΩΦ}\right)\right] = 0.5$$

$$u\left[\mathbf{g}\left(\text{ΤΑΞΙ}\right)\right] = 0.45$$

SUM = 1

Άρα τηρείται η προδιάταξη της Βασιλικής

Μεταβελτιστοποιηση (1/3)

Αναμενόμενα, η λύση του προβλήματος ΓΠ δεν είναι μοναδική, επομένως αναζητούμε πολλαπλές ημι-βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε τιμές σφάλματος μεταξύ z^* και $z^* + \varepsilon$, με $z^* = 0$. Επομένως, επιλύουμε το ίδιο πρόβλημα ΓΠ, λαμβάνοντας μηδενικά σφάλματα, και προσπαθώντας κάθε φορά να μεγιστοποιήσουμε τις χρησιμότητες των κριτηρίων:

w_{11}	w_{12}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{31}	w_{32}	w_{33}		δ
0	0.07	0	0	1	0	-1	0	>=	0.05
0	-0.14	0	0	0	1	1	0	=	0
0	0.29	1	1	0	0	0	0	>=	0.05
1	0.71	-1	0	0	-1	-1	-1	>=	0.05
1	1	1	1	1	1	1	1	=	1
1	1	0	0	0	0	0	0		$_{max}\mathbf{u_1(g_1^*)}$
0	0	1	1	1	0	0	0		$_{max}\mathbf{u_2(g_2^*)}$
0	0	0	0	0	1	1	1		$_{max}\mathbf{u_3(g_3^*)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

ΜΕΤΑΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ (2/3)

Δηλαδή, επιλύουμε τα εξής τρία προβλήματα:

$$\begin{cases} \max: w_{11}+w_{12} \\ s.t.: \\ 0.07w_{12}+w_{23}-w_{32}\geq 0.05 \\ -0.14w_{12}+w_{31}+w_{32}=0 \\ 0.29w_{12}+w_{21}+w_{22}\geq 0.05 \\ w_{11}+0.71w_{12}-w_{21}-w_{31}-w_{32}-w_{33}\geq 0.05 \\ w_{11}+w_{12}+w_{21}+w_{22}+w_{23}+w_{31}+w_{32}+w_{33}=1 \\ w_{ij}\geq 0, \quad \sigma^{+}(a_k)\geq 0, \quad \sigma^{-}(a_k)\geq 0 \quad \forall \text{ i, j, k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max: w_{21}+w_{22}+w_{23} \\ s.t.: \\ 0.07w_{12}+w_{23}-w_{32}\geq 0.05 \\ -0.14w_{12}+w_{31}+w_{32}=0 \\ 0.29w_{12}+w_{21}+w_{22}\geq 0.05 \\ w_{11}+0.71w_{12}-w_{21}-w_{31}-w_{32}-w_{33}\geq 0.05 \\ w_{11}+w_{12}+w_{21}+w_{22}+w_{23}+w_{31}+w_{32}+w_{33}=1 \\ w_{ij}\geq 0, \quad \sigma^{+}(a_k)\geq 0, \quad \sigma^{-}(a_k)\geq 0 \quad \forall \text{ i, j, k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max: w_{31}+w_{32}+w_{33} \\ s.t.: \\ 0.07w_{12}+w_{23}-w_{32}\geq 0.05 \\ -0.14w_{12}+w_{31}+w_{32}=0 \\ 0.29w_{12}+w_{21}+w_{22}\geq 0.05 \\ w_{11}+0.71w_{12}-w_{21}-w_{31}-w_{32}-w_{33}\geq 0.05 \\ w_{11}+w_{12}+w_{21}+w_{22}+w_{23}+w_{31}+w_{32}+w_{33}=1 \\ w_{ij}\geq 0, \quad \sigma^{+}(a_k)\geq 0, \quad \sigma^{-}(a_k)\geq 0 \quad \forall \text{ i, j, k} \end{cases}$$

ΜΕΤΑΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ (3/3)

Από τη μεταβελτιστοποίηση λαμβάνουμε τις ακόλουθες βέλτιστες λύσεις, εκ των οποίων παίρνουμε τον μέσο όρο για κάθε w_{ij}.

	w_{11}	w_{12}	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{31}	w_{32}	w_{33}
${}_{max}u_1(g_1^*)$	0.7625	0.175	0	0	0.0375	0.025	0	0
${}_{max}u_2(g_2^*)$	0.05	0	0	0.05	0.9	0	0	0
${}_{max}u_3(g_3^*)$	0.3562	0.175	0	0	0.0375	0.025	0	0.4063
Average	0.3896	0.1167	0.0000	0.0167	0.3250	0.0167	0.0000	0.1354

Τελική Λύση

Με βάση τις τιμές των οριακών χρησιμοτήτων, υπολογίζουμε την τελική χρησιμότητα των πέντε εναλλακτικών αναφοράς, η οποία φαίνεται πως συμφωνεί με την προδιάταξη που είχε δώσει η Βασιλική.

u[**g**(RER)]	0.856
u[**g**(ΜΕΤΡΟ1)]	0.523
u[**g**(ΜΕΤΡΟ2)]	0.523
u[**g**(ΛΕΩΦ)]	0.472
u[**g**(ΤΑΞΙ)]	0.152

Με τις ίδιες τιμές, και εκφράζοντας σε μορφή οριακών αξιών οποιαδήποτε άλλη δράση, η Βασιλική θα μπορούσε να υπολογίσει τη βέλτιστη λύση από οσαδήποτε εναλλακτικά μέσα μεταφοράς.

ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΔΙΑΒΑΣΜΑ

Βιβλιογραφια

Jacquet-Lagreze, E., & Siskos, J. (1982). Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method. European journal of operational research, 10(2), 151-164.

Siskos, Y., & Yannacopoulos, D. (1985). UTASTAR: An ordinal regression method for building additive value functions. Investigaçao Operacional, 5(1), 39-53.

Siskos, Y., & Grigoroudis, E. (2010). New trends in aggregation-disaggregation approaches. In Handbook of multicriteria analysis (pp. 189-214). Springer, Berlin, Heidelberg.

Papapostolou, A., Karakosta, C., Nikas, A., & Psarras, J. (2017). Exploring opportunities and risks for RES-E deployment under Cooperation Mechanisms between EU and Western Balkans: A multi-criteria assessment. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 80, 519-530.

Nikas, A., Doukas, H., Siskos, E., & Psarras, J. (2018). International Cooperation for Clean Electricity: A UTASTAR Application in Energy Policy. In Preference Disaggregation in Multiple Criteria Decision Analysis (pp. 163-186). Springer, Cham.

Siskos, Y., Grigoroudis, E., & Matsatsinis, N. F. (2005). UTA methods. In Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys (pp. 297-334). Springer, New York, NY.

Ερωτησεις

Thank You!

Alexandros Nikas

Email: anikas@epu.ntua.gr
Tel: (+30) 210 7723609