Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη ηλεκτρολογων μηχανικων και μηχανικων υπολογιστων
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

Η ΜΕΘΟΔΟΣ VIKOR

Πολυκριτήρια Ανάλυση Αποφάσεων, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Γιώργος Τραχανάς, Χάρης Δούκας, Ιωάννης Ψαρράς

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

- Πολύ συχνά, πολλά πρακτικά προβλήματα χαρακτηρίζονται από αντικρουόμενα (conflicting) και δυσανάλογα (non-commensurable) κριτήρια.

- Είναι πολύ πιθανό να μην υπάρχει λύση που να ικανοποιεί όλα τα κριτήρια ταυτόχρονα.

- Οι μέθοδοι Πολυκριτήριας Ανάλυσης Αποφάσεων (ΠΑΑ) παρέχουν μεθοδολογικά πλαίσια αξιολόγησης και επιλογής από ένα σύνολο εναλλακτικών υπό την παρουσία κριτηρίων.

- Λύσεις ή σύνολα λύσεων συμβιβασμού (compromise solution sets).

ΜΕΘΟΔΟΣ VIKOR

- Η μέθοδος VIKOR μας προσφέρει μια κατάταξη (ranking) των εναλλακτικών για δοθέντα κριτήρια.
- Πολύ συχνά συγκρίνεται με τη γνωστή μέθοδο TOPSIS.
- Διαφορές VIKOR - TOPSIS:
  - Συνάρτηση συνάθροισης (aggregation function)
  - Μέθοδος κανονικοποίησης (normalization)
  - Στην TOPSIS, λαμβάνουμε υπόψη τόσο την απόσταση από τη θετική ιδεατή λύση, όσο και από την αντίστοιχη αρνητική ιδεατή λύση.
    - Ταιριάζει σε επιφυλακτικούς αποφασίζοντες.
  - Στη VIKOR, λαμβάνουμε υπόψη μόνο τη θετική ιδεατή λύση.
    - Ταιριάζει σε πιο ριψοκίνδυνους αποφασίζοντες.

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ VIKOR

- Εύκολα προγραμματιζόμενη υπολογιστική διαδικασία.
- Ενσωματώνει ταυτόχρονα δύο διαφορετικές οπτικές ως προς τα κριτήρια:
  - Μέγιστη χρησιμότητα ως προς όλα τα κριτήρια.
  - Βαθμός δυσαρέσκειας (regret) απέναντι σε κάθε κριτήριο ξεχωριστά.
- Αντιστάθμισμα (trade-off) των δύο παραπάνω οπτικών.
- Προσαρμογή σε προβλήματα Λήψης Αποφάσεων υπό Αβεβαιότητα.
- Επεκτασιμότητα
  - Ασαφή (fuzzy) ή αβέβαια (uncertain) δεδομένα
  - Κριτήρια με ελλιπή πληροφόρηση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ - ΔΟΜΗ

Στα προβλήματα ΠΑΑ, συνήθως θεωρούμε:

- Ένα σύνολο εναλλακτικών

$$A = \{A_1, \dots, A_m\}$$

- Ένα σύνολο κριτηρίων

$$C = \{C_1, \dots, C_n\}$$

- Τις επιδόσεις - βαθμολογίες (performances)

$$f_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

των εναλλακτικών σε κάθε κριτήριο.

- Τα βάρη των κριτηρίων

$$W = \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}: \sum_{j=1}^{n} w_j = 1,\ w_j \geq 0, j = 1, \dots, n\right\}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ - ΔΟΜΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Πίνακας Απόφασης

	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$	**…**	$\boldsymbol{C_n}$
$\boldsymbol{A_1}$	f_{11}	f_{12}	…	f_{1n}
$\boldsymbol{A_2}$	f_{21}	f_{22}	…	f_{2n}
…	…	…	…	…
$\boldsymbol{A_m}$	f_{m1}	f_{m2}	…	f_{mn}

$$\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_n)$$

ΜΕΤΡΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Η μέθοδος VIKOR βασίζεται στη λεγόμενη L^p-μετρική

$$L_i^p = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty$$

όπου:

- f_j^* αντιστοιχεί στην καλύτερη επίδοση στο κριτήριο C_j.
- f_j^- αντιστοιχεί στη χειρότερη επίδοση στο κριτήριο C_j.

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΤΙΜΕΣ MAX & MIN)

1. Σε κάθε κριτήριο, προσδιορίζουμε την καλύτερη και την χειρότερη τιμή, f_j^* και f_j^-, αντίστοιχα.

- Αν το κριτήριο εκφράζει κάποιο όφελος (benefit), τότε

$$f_j^* = \max_i f_{ij}$$

$$f_j^- = \min_i f_{ij}$$

- Αν το κριτήριο εκφράζει κάποιο κόστος (cost), τότε

$$f_j^* = \min_i f_{ij}$$

$$f_j^- = \max_i f_{ij}$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (S)

2. Για κάθε εναλλακτική A_i, υπολογίζουμε την ποσότητα

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|, \qquad i = 1, \dots, m$$

- Η ποσότητα S_i σχετίζεται με τη σταθμισμένη L^1-μετρική και εκφράζει τη σταθμισμένη, κανονικοποιημένη απόσταση από τη θετική ιδεατή λύση, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα κριτήρια.

- Προφανώς, επιθυμούμε όσο το δυνατόν μικρότερο S.

- Αρχή της μέγιστης συνολικής χρησιμότητας (group utility).

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (R)

3. Για κάθε εναλλακτική A_i, υπολογίζουμε επίσης την ποσότητα

$$R_i = \max_j w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right|, \qquad i = 1, \ldots, m$$

- Η R_i σχετίζεται με την L^∞-μετρική και εκφράζει, για κάθε εναλλακτική, τη μέγιστη δυσαρέσκεια «κατά μήκος» των κριτηρίων.
- Προφανώς, επιθυμούμε να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.
- Αρχή της μεμονωμένης δυσαρέσκειας (individual regret).

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (Q)

4. Στη VIKOR λαμβάνουμε υπόψη <u>και τις δύο</u> προηγούμενες ποσότητες.

Πράγματι, υπολογίζουμε την ποσότητα

$$Q_i = \nu \frac{S_i - S^*}{S^- - S^*} + (1-\nu)\frac{R_i - R^*}{R^- - R^*}, \qquad i = 1, \dots, m$$

όπου

$$S^* = \min_i S_i\,, \qquad S^- = \max_i S_i$$

$$R^* = \min_i R_i\,, \qquad R^- = \max_i R_i$$

Η σταθερά $0 \leq \nu \leq 1$ εκφράζει την οπτική του αποφασίζοντα ως προς τις δύο διαφορετικές μετρικές. Εισάγεται για να σταθμίσει τη στρατηγική της μέγιστης συνολικής χρησιμότητας έναντι της στρατηγικής της μεμονωμένης δυσαρέσκειας (συνήθως v=0.5).

5. Στη συνέχεια, δημιουργούμε <u>τρεις λίστες</u> με τις εναλλακτικές, <u>διατεταγμένες</u> ως προς τα S, R και Q.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ - ΛΥΣΗ

- Ερώτημα: ποια εναλλακτική προτείνει ως λύση η μέθοδος VIKOR;

- Έστω ότι η εναλλακτική Α′ έχει την καλύτερη επίδοση ως προς το μέτρο Q (minimum). Τότε, η Α′ προτείνεται ως λύση, εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

  - Συνθήκη C1 (*Συγκριτικό πλεονέκτημα*):

$$Q(A'') - Q(A') \geq DQ$$

όπου Α″ είναι η αμέσως επόμενη καλύτερη εναλλακτική στην Q-λίστα και

$$DQ = \frac{1}{m-1}$$

  - Συνθήκη C2 (*Ευστάθεια*): Η εναλλακτική Α′ είναι η καλύτερη (minimum) ως προς S ή/και R.

ΣΥΝΘΗΚΕΣ - ΛΥΣΗ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Αν δεν ικανοποιείται κάποια από τις συνθήκες, τότε οδηγούμαστε σε *σύνολο λύσεων συμβιβασμού* (compromise solutions set). Συγκεκριμένα:

  - Αν δεν ικανοποιείται μόνο η συνθήκη C2, τότε επιλέγουμε ως λύση τις A′ και A″.

  - Αν δεν ικανοποιείται η C1, τότε θεωρούμε ως λύση τις εναλλακτικές

$$\left\{\mathrm{A}', \mathrm{A}'', \ldots, \mathrm{A}^{(\mathrm{M})}\right\}$$

όπου η $\mathrm{A}^{(\mathrm{M})}$ προσδιορίζεται από τη σχέση

$$Q\left(A^{(M)}\right) - Q(A') < DQ$$

για το μέγιστο M που ισχύει η παραπάνω σχέση (εγγύτητα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Πίνακας Απόφασης

	C_1	C_2	C_3
A_1	0.9	800	110
A_2	0.7	1000	90
A_3	0.6	1100	80
A_4	0.8	700	60

Πλήθος εναλλακτικών: 4
Πλήθος κριτηρίων: 3 (οφέλη και τα 3)

Βάρη κριτηρίων: $w_1 = w_2 = w_3 = 1/3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Αρχικά, υπολογίζουμε την καλύτερη και τη χειρότερη επίδοση ανά κριτήριο, δηλ. τις τιμές

$$f_j^*, f_j^-, j = 1,2,3$$

καθώς και τον παρονομαστή κανονικοποίησης $f_j^* - f_j^-$

	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$	$\boldsymbol{C_3}$
$\boldsymbol{f_j^*}$	0.9	1100	110
$\boldsymbol{f_j^-}$	0.6	700	60
$\boldsymbol{f_j^* - f_j^-}$	0.3	400	50

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον πίνακα που περιέχει τα στοιχεία

$$\left(\left|\frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}\right|\right), i = 1,2,3,4, j = 1,2,3$$

- Είναι ουσιαστικά ο πίνακας που περιέχει τις κανονικοποιημένες δυσαρέσκειες (normalized regrets).

	C_1	C_2	C_3
A_1	0.00	0.75	0.00
A_2	0.67	0.25	0.40
A_3	1.00	0.00	0.60
A_4	0.33	1.00	1.00

Normalized Regrets

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Υπολογισμός των S

	C_1	C_2	C_3	S_i
A_1	0.00	0.75	0.00	0.25
A_2	0.67	0.25	0.40	0.44
A_3	1.00	0.00	0.60	0.53
A_4	0.33	1.00	1.00	0.77

π.χ.

$$S_1 = \sum_{j=1}^{3} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} = (1/3)(0) + (1/3)(0.75) + (1/3)(0) = 0.25$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Υπολογισμός των R

	C_1	C_2	C_3	R_i
A_1	0.00	0.75	0.00	0.25
A_2	0.67	0.25	0.40	0.22
A_3	1.00	0.00	0.60	0.33
A_4	0.33	1.00	1.00	0.33

π.χ. $R_1 = \max\left\{\left(\frac{1}{3}\right)(0), \left(\frac{1}{3}\right)(0.75), \left(\frac{1}{3}\right)(0)\right\} = 0.25$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$S^* = \min\{0.25, 0.44, 0.53, 0.77\} = 0.25$$
$$S^- = \max\{0.25, 0.44, 0.53\ 0.77\} = 0.77$$

$$R^* = \min\{0.25, 0.22, 0.33, 0.33\} = 0.22$$

$$R^- = \max\{0.25, 0.22, 0.33, 0.33\} = 0.33$$

- Ο αποφασίζων θεωρεί ν=0.5. Υπολογίζουμε τα Q:

	$\boldsymbol{Q_i}$
$\boldsymbol{A_1}$	0.14
$\boldsymbol{A_2}$	0.18
$\boldsymbol{A_3}$	0.76
$\boldsymbol{A_4}$	1.00

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Οι τρεις λίστες κατάταξης

	S	R	Q
A_1	1	2	1
A_2	2	1	2
A_3	3	3	3
A_4	4	3	4

- Τι προτείνεται;
  - A_1;
  - A_2;
  - Σύνολο συμβιβασμού;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Η A_1, πέρα από τα Q, κατατάσσεται πρώτη και στα S. Άρα έχουμε ευστάθεια.
- m=4, επομένως DQ=1/(4-1)=1/3 και
- $Q(A_2) - Q(A_1) = 0.18 - 0.14 = 0.04 < 1/3$

δηλαδή δεν ικανοποιείται η C1.

- Επίσης, $Q(A_3) - Q(A_1) = 0.76 - 0.14 = 0.62 > 1/3$. Άρα M=2.
- Επομένως, η μέθοδος VIKOR προτείνει ως λύση το σύνολο συμβιβασμού

$$\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

- Θεωρούμε τον ίδιο πίνακα απόφασης με το Παράδειγμα 1, **όμως τώρα υποθέτουμε ότι το κριτήριο C_2 είναι κριτήριο κόστους**!
- Επίσης, **αλλάζουμε τα βάρη σε**

$$w_1 = 0.3, w_2 = 0.4, w_3 = 0.3$$

Πίνακας Απόφασης

	C_1	C_2	C_3
A$_1$	0.9	800	110
A$_2$	0.7	1000	90
A$_3$	0.6	1100	80
A$_4$	0.8	700	60
	benefit	cost	benefit

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

	C_1	C_2	C_3
f_j^*	0.9	700	110
f_j^-	0.6	1100	60
$f_j^* - f_j^-$	0.3	400	50

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$\left(\left|\frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-}\right|\right)$$

	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$	$\boldsymbol{C_3}$
$\mathbf{A_1}$	0.00	0.25	0.00
$\mathbf{A_2}$	0.67	0.75	0.40
$\mathbf{A_3}$	1.00	1.00	0.60
$\mathbf{A_4}$	0.33	0.00	1.00

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Υπολογισμός των *S*

	C_1	C_2	C_3	S_i
$\mathbf{A_1}$	0.00	0.25	0.00	0.10
$\mathbf{A_2}$	0.67	0.75	0.40	0.62
$\mathbf{A_3}$	1.00	1.00	0.60	0.88
$\mathbf{A_4}$	0.33	0.00	1.00	0.39

π.χ.

$$S_2 = \sum_{j=1}^{3} w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right| = (0.3)(0.67) + (0.4)(0.75) + (0.3)(0.4) = 0.62$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Υπολογισμός των *R*

	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$	$\boldsymbol{C_3}$	$\boldsymbol{R_i}$
$\mathbf{A_1}$	0.00	0.25	0.00	0.10
$\mathbf{A_2}$	0.67	0.75	0.40	0.30
$\mathbf{A_3}$	1.00	1.00	0.60	0.40
$\mathbf{A_4}$	0.33	0.00	1.00	0.30

π.χ.

$$R_2 = \max_j w_j \left| \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \right| = \max\{(0.3)(0.67), (0.4)(0.75), (0.3)(0.4)\}$$
$$= 0.3$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$S^* = \min\{0.10, 0.62, 0.88, 0.39\} = 0.10$$
$$S^- = \max\{0.10, 0.62, 0.88, 0.39\} = 0.88$$

$$R^* = \min\{0.10, 0.30, 0.40, 0.30\} = 0.10$$
$$R^- = \max\{0.10, 0.30, 0.40, 0.30\} = 0.40$$

- Ο αποφασίζων θεωρεί v=0.4. Υπολογίζουμε τα Q:

	$\boldsymbol{Q_i}$
$\mathbf{A_1}$	0.00
$\mathbf{A_2}$	0.66
$\mathbf{A_3}$	1.00
$\mathbf{A_4}$	0.54

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Οι τρεις λίστες κατάταξης

	S	R	Q
$\mathbf{A_1}$	1	1	1
$\mathbf{A_2}$	3	2	3
$\mathbf{A_3}$	4	3	4
$\mathbf{A_4}$	2	2	2

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

- Η A_1, πέρα από τα Q, κατατάσσεται πρώτη και στα S και R. Άρα έχουμε ευστάθεια.
- $DQ = 1/3$
- $Q(A_4) - Q(A_1) = 0.54 - 0 = 0.54 > 1/3$. Συγκριτικό πλεονέκτημα της A_1.
- Επομένως, η μέθοδος VIKOR προτείνει ως λύση την εναλλακτική A_1.

Βιβλιογραφια

Opricovic S. & Tzeng G.-H. (2004). *Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS*, European Journal of Operational Research 156 (2), pp. 445-455.

Opricovic S. & Tzeng G.-H. (2007). *Extended VIKOR method in comparison with out ranking methods*, European Journal of Operational Research 178 (2), pp. 514-529.

Sayadi M.K., Heydari M., & Shahanaghi K. (2009). *Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers*, Applied Mathematical Modelling 33 (5), pp. 2257-2262.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Thank you!

Georgios Trachanas

Email: gtrachanas@epu.ntua.gr