ΕΝΟΤΗΤΑ 11
Αναλυτική-συνθετική προσέγγιση

Εισαγωγή

Οι περισσότερες μέθοδοι πολυκριτήριας ανάλυσης βασίζονται στις αρχές της γραμμικότητας και της αιτιότητας, δηλαδή στην αντίληψη ότι η διαδικασία λήψης απόφασης είναι μονόδρομη, καθώς η τελική απόφαση οφείλει να καθορίζεται από τα κριτήρια και να ακολουθεί τη διαδικασία σύνθεσης αυτών· αυτή η παραδοσιακή προσέγγιση καλείται και συνθετική προσέγγιση (aggregation approach).

Μία διαφορετική προσέγγιση, σύμφωνα με την οποία η απόφαση και τα κριτήρια υπόκεινται σε προοδευτική επεξεργασία, καθώς η σχέση τους είναι αμφίδρομη, καλείται αναλυτική-συνθετική προσέγγιση (aggregation-disaggregation approach). Η προσέγγιση αυτή εστιάζεται στην συσχέτιση των πραγματικών δεδομένων και του μοντέλου απόφασης, έτσι ώστε το μοντέλο να πλησιάζει όσο περισσότερο τις προτιμήσεις του αποφασίζοντος γίνεται (επαγωγή). Ουσιαστικά, στις μεθόδους της προσέγγισης αυτής εκτιμώνται οι παράμετροι εκείνες ενός μοντέλου απόφασης οι οποίες επιτρέπουν την βέλτιστη ανασύσταση μίας απόφασης.

Το παραπάνω προϋποθέτει ότι το αποτέλεσμα μίας απόφασης μπορεί να παρατηρηθεί, όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις αποφάσεων με επαναληπτικό χαρακτήρα, ή να εξωτερικευθεί από τον αποφασίζοντα μέσα από τον διάλογο. Μόλις το μοντέλο απόφασης προσδιοριστεί, ο απώτερος σκοπός είναι να επεκταθεί στο σύνολο Α των εναλλακτικών δράσεων του προβλήματος που ο αναλυτής και ο αποφασίζων καλούνται να επιλύσουν. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί ασυνέπεια μεταξύ μοντέλου και αποφασίζοντος, οφείλει να αναθεωρηθεί η συνεπής οικογένεια κριτηρίων ή η αξιοπιστία των δεδομένων της απόφασης.

Για την αποσαφήνιση της ολικής προτίμησης του αποφασίζοντος, οφείλει να υπάρχει ένα **σύνολο δράσεων αναφοράς (reference actions) $\mathbf{A_R}$**, το οποίο μπορεί να είναι ένα σύνολο από προγενέστερες δράσεις (past decisions), ένα υποσύνολο των πραγματικών δράσεων του προβλήματος $A_R \subset A$, ή ένα σύνολο εικονικών δράσεων, το οποίο ο αποφασίζων δύναται να αξιολογήσει με ευκολία, προκειμένου να εκφράσει τις ολικές του προτιμήσεις. Όποιο κι αν είναι όμως το σύνολο $\mathbf{A_R}$, ο αποφασίζων καλείται να επιβεβαιώσει τις ολικές προτιμήσεις του σ' αυτό, λαμβάνοντας υπόψη τις επιδόσεις των δράσεων αναφοράς του $\mathbf{A_R}$ σε όλα τα κριτήρια.

Η οικογένεια μεθόδων UTA

Η μέθοδος **UTA (UTilités Additives)** σηματοδότησε την εισαγωγή της αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης ως ρεύμα της πολυκριτήριας ανάλυσης. Η τεχνική έχει ως στόχο την επαγωγή μίας ή περισσότερων προσθετικών συναρτήσεων αξίας από μία προδιάταξη ενός συνόλου αναφοράς $\mathbf{A_R}$. Για τον καθορισμό των συναρτήσεων αυτών, χρησιμοποιούνται ειδικές τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού έτσι ώστε η κατάταξη που αποκτάται μέσω των συναρτήσεων να είναι όσο το δυνατό πιο κοντά στην αρχική προδιάταξη.

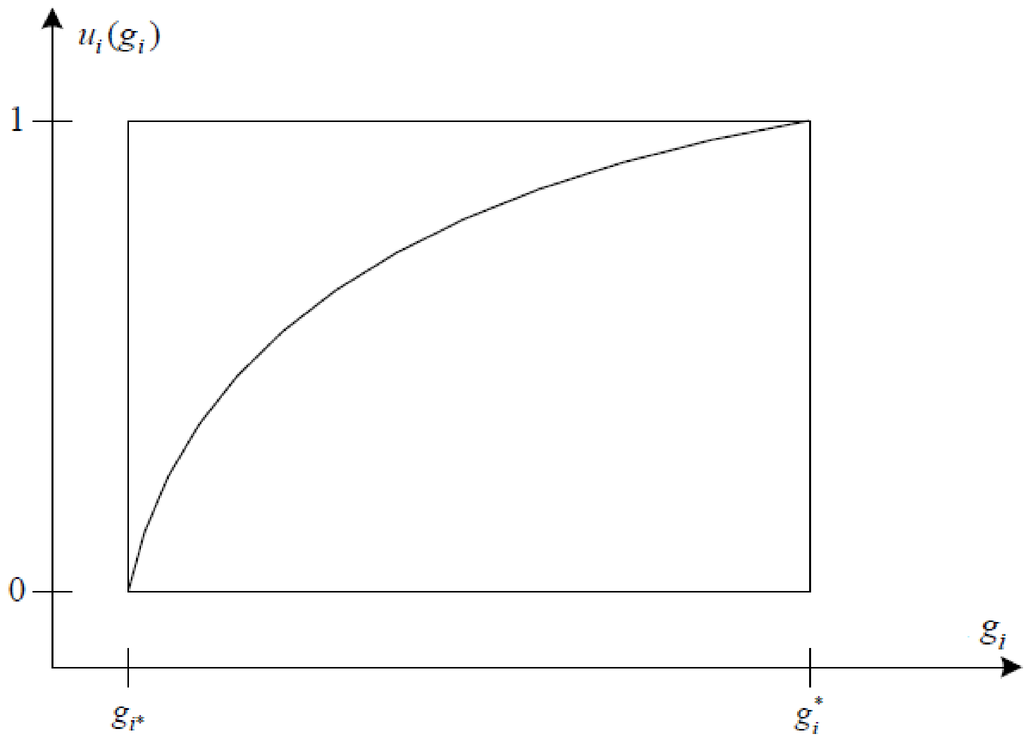
Το μοντέλο σύνθεσης κριτηρίων της μεθόδου UTA βασίζεται σε μία προσθετική συνάρτηση αξίας της μορφής:

$$u(\boldsymbol{g}) = \sum_{1}^{n} p_i \cdot u_i(g_i)$$

που υπόκειται στους εξής περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} p_i = 1 \\ u_i(g_{i^*}) = 0, \quad u_i(g_i^{*}) = 1 \qquad \forall\ i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

όπου u_i είναι αύξουσες συναρτήσεις των g_i, και καλούνται οριακές ή μερικές συναρτήσεις αξίας (marginal value functions), οι οποίες κανονικοποιούνται μεταξύ των τιμών 0 και 1, ενώ $p_i \geq 0$ είναι ο συντελεστής βαρύτητας του u_i, για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.



Η κανονικοποιημένη οριακή συνάρτηση αξίας

Συγκεκριμένα, το μοντέλο απόφασης της μεθόδου UTA αποτελείται από μία μορφή προσθετικής συνάρτησης αξίας χωρίς συντελεστές βαρύτητας (αστάθμητη), της μορφής:

$$u(g)=\sum_{1}^{n} u_i(g_i)$$

καθώς και τους περιορισμούς κανονικοποίησης:

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} u_i(g_i^{*}) = 1 \\ u_i(g_{i^*}) = 0 \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

όπου u_i είναι αύξουσες συναρτήσεις των g_i, οι οριακές συναρτήσεις αξίας.

Αποδεικνύεται ότι η αυτή η τελευταία αστάθμητη μορφή u είναι αυστηρά ισοδύναμη της σταθμισμένης, έστω u', αρκεί να θέσουμε $u_i = p_i \cdot u_i'$, καθώς και $p_i = u_i(g_i^{*})$.

Φυσικά, η ύπαρξη ενός τέτοιου προτιμησιακού μοντέλου προϋποθέτει την προτιμησιακή ανεξαρτησία των κριτηρίων για τον αποφασίζοντα, και η ιδιότητα της συνέπειας ή μονοτονίας θα πρέπει να ισχύει τόσο για τις οριακές όσο και για την ολική συνάρτηση αξίας, στην περίπτωση της οποίας θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} u[g(a)] > u[g(b)] \Leftrightarrow a \succ b \text{ (preference)} \\ u[g(a)] = u[g(b)] \Leftrightarrow a \approx b \text{ (indifference)} \end{cases}$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις προτίμησης και το νέο προσθετικό μοντέλο της UTA, η αξία κάθε εναλλακτικής $a \in \boldsymbol{A_R}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$u'[\boldsymbol{g}(a)] = \sum_{1}^{n} u_i[g_i(a)] + \sigma(\alpha) \qquad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}$$

όπου το σ(α) αποτελεί ένα πιθανό σφάλμα σχετικό με το $u'[\boldsymbol{g}(a)]$.

Προκειμένου να υπολογιστούν οι αντίστοιχες οριακές συναρτήσεις αξίας σε μία τμηματικά γραμμική μορφή, προτάθηκε η χρήση της γραμμικής παρεμβολής, δηλαδή η διαίρεση του διαστήματος $[g_{i^*}, g_i^{*}]$ για κάθε κριτήριο i σε $(a_i - 1)$ ίσα διαστήματα, έτσι ώστε τα τελικά σημεία g_i^j να υπολογίζονται από τον τύπο:

$$g_i^j = g_{i^*} + \frac{j-1}{a_i - 1}\left(g_i^{*} - g_{i^*}\right) \qquad \forall\ \mathrm{j} = 1,2,\ldots,a_i$$

Η οριακή αξία κάθε εναλλακτικής *a* προσδιορίζεται με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής, έτσι ώστε για κάθε $g_i(a) \in [g_i^j, g_i^{j+1}]$, η οριακή αξία θα ισούται με:

$$u_i[g_i(a)] = u_i(g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j}\left[u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)\right]$$

Οι εναλλακτικές δράσεις του συνόλου αναφοράς $\boldsymbol{A_R} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ανακατατάσσονται με τέτοιο τρόπο ώστε a_1 να είναι η κεφαλή και a_m η ουρά της κατάταξης. Η συγκεκριμένη κατάταξη έχει τη μορφή μίας προδιάταξης *R*, άρα και για κάθε ζεύγος διαδοχικών δράσεων $\left(a_k, a_{k+1}\right)$ θα υπάρχει είτε σχέση προτίμησης, δηλαδή $a_k \succ a_{k+1}$, είτε σχέση αδιαφορίας, δηλαδή $a_k \approx a_{k+1}$.

Έτσι, αν θέσουμε την διαφορά των αξιών $\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = u'[\boldsymbol{g}(a_k)] - u'[\boldsymbol{g}(a_{k+1})]$, θα ισχύει ότι:

$$\begin{cases} \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) \geq \delta \quad iff \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = 0 \quad iff \;\; a_k \approx a_{k+1} \end{cases}$$

όπου δ ένας μικρός θετικός αριθμός που διαχωρίζει σημαντικά δύο διαδοχικές κλάσεις ισοδυναμίας της *R*.

Δεδομένου ότι οι προτιμήσεις του αποφασίζοντος χαρακτηρίζονται από μονοτονία, οι οριακές αξίες πρέπει να ικανοποιούν το σύνολο των περιορισμών:

$$\left[u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j)\right] \geq s_i \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots n \ \text{ and } \ \forall\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i - 1$$

όπου $s_i \geq 0$ είναι τα κατώφλια αδιαφορίας για κάθε κριτήριο g_i.

Δεν είναι απαραίτητη η χρήση των παραπάνω κατωφλίων στο μοντέλο της UTA, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξασφαλίζεται ότι δε θα συμβεί οι οριακές αξίες δύο διαδοχικών σημείων να είναι ίσες, όταν υπάρχει προτιμησιακή σχέση μεταξύ τους. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $s_i = 0$ στο μοντέλο μας.

Οι οριακές συναρτήσεις αξίας τελικά υπολογίζονται από το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, με περιορισμούς τις παραπάνω σχέσεις και αντικειμενική συνάρτηση που εξαρτάται από το σφάλμα σ(α) που υποδεικνύει την συνολική απόκλιση:

$$\begin{cases} \min : F = \sum\limits_{a \in \boldsymbol{A_R}} \sigma(a) \\ s.t.: \\ \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) \geq \delta \quad if \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = 0 \quad if \;\; a_k \approx a_{k+1} \\ u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0 \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots n \ \text{ and } \ \forall\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i - 1 \\ \sum\limits_{1}^{n} u_i(g_i^*) = 1 \\ u_i(g_{i*}) = 0, \quad u_i(g_i^j) \geq 0, \quad \sigma(\alpha) \geq 0 \quad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}, \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots n \ \text{ and } \ \forall\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, a_i \end{cases}$$

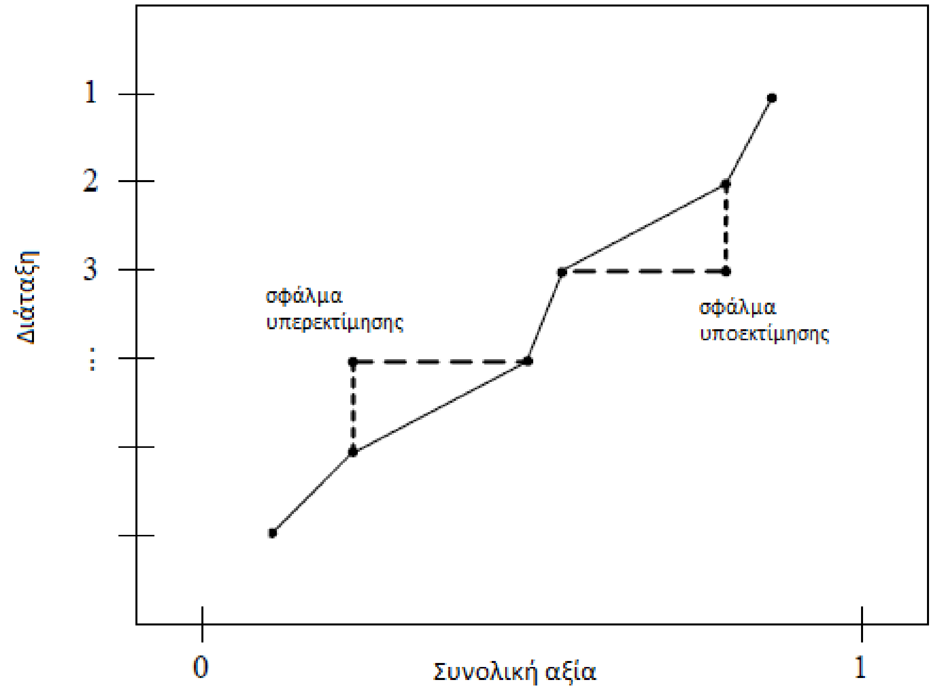
Η ανάλυση ευστάθειας των αποτελεσμάτων του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού αποτελεί πρόβλημα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Εάν η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι $F^*=0$, το υπερπολύεδρο των αποδεκτών λύσεων για τις συναρτήσεις αξίας δεν είναι κενό, αλλά υπάρχουν πολλαπλές συναρτήσεις αξίας που είναι απόλυτα συνεπείς με την προδιάταξη *R*. Στην αρχική μορφή της μεθόδου UTA, προτείνεται η διερεύνηση του πολυέδρου μέσω μίας ευρετικής μεθόδου αναζήτησης ημι- βέλτιστων λύσεων, ελαχιστοποιώντας και μεγιστοποιώντας κάθε φορά τα $u_i(g_i^*)$ (ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού) στο πολύεδρο των περιορισμών, φραγμένο από τις ευθείες $F=F^*$ και $F=F^*+k(F^*)$, όπου $k(F^*)$ είναι ένα θετικό (ή μηδενικό) κατώφλι, το οποίο καθορίζεται ως ένα μικρό ποσοστό του σφάλματος F^*. Ως τελική λύση του προβλήματος, υπολογίζεται η μέση τιμή των λύσεων των συγκεκριμένων προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, η οποία είναι και αυτή (ημι-) βέλτιστη λόγω της κυρτότητας του πολυέδρου. Ο βαθμός σύγκλισης των λύσεων αυτών εκφράζει και το βαθμό ευστάθειας, ενώ οι λύσεις εκφράζουν τη διακύμανση των συντελεστών βαρύτητας των κριτηρίων g_i, δίνοντας και μία ιδέα της σημαντικότητας των κριτηρίων στο σύστημα προτιμήσεων του αποφασίζοντος. Τα παραπάνω δεν σημαίνουν ότι δεν υπάρχουν άλλοι αλγόριθμοι εξέτασης των λύσεων-κορυφών του υπερπολυέδρου.

Η μέθοδος UTASTAR

Η μέθοδος UTASTAR αποτελεί μία βελτιωμένη εκδοχή του μοντέλου UTA, στην οποία κάθε εναλλακτική δράση $a \in \boldsymbol{A_R}$ σχετίζεται με ένα σφάλμα ***σ(a)*** προς ελαχιστοποίηση. Αυτή η συνάρτηση σφάλματος, όμως, δεν επαρκεί για την ελαχιστοποίηση της ολικής διασποράς των σημείων γύρω από τη μονότονη καμπύλη της συνολικής αξίας. Καθώς το σφάλμα αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσον του μηδενός, αντιστοιχεί σε όλα τα σημεία που βρίσκονται στα αριστερά της καμπύλης. Το πρόβλημα, δηλαδή, αφορά τα σημεία που βρίσκονται δεξιά της καμπύλης από τα οποία θα ήταν προτιμότερο να αφαιρεθεί μία ποσότητα αξίας χωρίς να αυξηθούν οι αξίες των άλλων (υπόδειγμα της διατακτικής παλινδρόμησης).

Στην UTASTAR, εισάγεται μία διπλή θετική συνάρτηση σφάλματος, μία που να καλύπτει τα σημεία αριστερά της καμπύλης (σφάλμα υπερεκτίμησης σ^-) και μία που να καλύπτει τα σημεία δεξιά της καμπύλης (σφάλματα υποεκτίμησης σ^+), δηλαδή:

$$u'[g(a)] = \sum_{1}^{n} u_i[g_i(a)] - \sigma^+(\alpha) + \sigma^-(\alpha) \qquad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}$$



Σφάλματα υπερεκτίμησης σ⁻ και υποεκτίμησης σ⁺ γύρω από την καμπύλη συνολικής αξίας

Μία άλλη τροποποίηση που εισάγεται στην UTASTAR αφορά τους περιορισμούς μονοτονίας των κριτηρίων, οι οποίοι πλέον μοντελοποιούνται μέσω των ακόλουθων μετασχηματισμών των μεταβλητών:

$$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^{j}) \geq 0 \quad \forall\ a \in \boldsymbol{A_R}, \quad \forall\ i = 1,2,...n \quad \text{and} \quad \forall\ \mathrm{j} = 1,2,...,a_i - 1$$

Έτσι, οι συνθήκες μονοτονίας μπορούν να αντικατασταθούν από περιορισμούς μη αρνητικότητας για τις μεταβλητές w_{ij} (για $s_{ij}=0$).

Με τις δύο αυτές τροποποιήσεις, ο αλγόριθμος της UTASTAR συνοψίζεται στα ακόλουθα βήματα.

1. Η ολική αξία των δράσεων αναφοράς $u[\boldsymbol{g}(a_k)]$, k = 1, 2, ..., m, εκφράζεται πρώτα σε όρους οριακών αξιών $u_i(g_i)$, και κατόπιν σε όρους w_{ij}:

$$\begin{cases} u_i(g_i^{1}) = 0 & \forall\ i = 1,2,...n \\ u_i(g_i^{j}) = \sum_{t=1}^{t=j-1} w_{it} & \forall\ i = 1,2,...n \end{cases}$$

2. Εισάγονται δύο συναρτήσεις σφάλματος σ^+ και σ^- στο σύνολο δράσεων αναφοράς A_R, γράφοντας για κάθε ζεύγος διαδοχικών δράσεων στην προδιάταξη τις αναλυτικές εκφράσεις (σε μορφή διαφορών):

$$\Delta\left(a_k, a_{k+1}\right) = \left\{u[\boldsymbol{g}(a_k)] - \sigma^+(a_k) + \sigma^-(a_k)\right\} - \left\{u[\boldsymbol{g}(a_{k+1})] - \sigma^+(a_{k+1}) + \sigma^-(a_{k+1})\right\}$$

3. Επιλύεται το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{cases} \min : z = \sum_{k=1}^{m} \left[\sigma^{+}(a_k) + \sigma^{-}(a_k) \right] \\ s.t.: \\ \left.\begin{array}{l} \Delta(a_k, a_{k+1}) \geq \delta \quad if \;\; a_k \succ a_{k+1} \\ \Delta(a_k, a_{k+1}) = 0 \quad if \;\; a_k \approx a_{k+1} \end{array}\right\} \forall k \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{a_i - 1} w_{ij} = 1 \\ w_{ij} \geq 0, \quad \sigma^{+}(a_k) \geq 0, \quad \sigma^{-}(a_k) \geq 0 \quad \forall \text{ i, j, k} \end{cases}$$

όπου δ είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων και ο προσδιορισμός μηδενικής τιμής υποδηλώνει ότι η προδιάταξη των δράσεων αναφοράς που έδωσε ο αποφασίζων δεν φέρουν σφάλματα υποεκτίμησης ή υπερεκτίμησης. Τέτοια σφάλματα, σε περίπτωση που δεν είναι μηδενικά, υποδηλώνουν ότι η προδιάταξη του αποφασίζοντος φέρει ασυνέπειες, οι οποίες την καθιστούν ασύμβατη με κάποιο (οποιοδήποτε) προτιμησιακό μοντέλο. Σε αυτή την περίπτωση, ο αναλυτής οφείλει να ζητήσει από τον αποφασίζοντα να επανεκτιμήσει τις απαντήσεις του σχετικά με την προδιάταξη που θα δοθεί στο σύνολο εναλλακτικών δράσεων αναφοράς.

4. Ελέγχεται η ύπαρξη πολλαπλών (ημι-) βέλτιστων λύσεων στο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, υπολογίζοντας το βαρύκεντρο των προσθετικών συναρτήσεων αξίας που μεγιστοποιούν τις ακόλουθες αντικειμενικές συναρτήσεις:

$$u_i(g_i^*) = \sum_{j=1}^{a_i - 1} w_{ij} \qquad \forall \; i = 1, 2, \ldots n$$

στο υπερπολύεδρο των περιορισμών του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού του βήματος 3, που περιορίζεται από τον νέο περιορισμό:

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\sigma^{+}(a_k) + \sigma^{-}(a_k) \right] \leq z^* + \varepsilon$$

όπου z^* είναι η βέλτιστη τιμή του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού του βήματος 3, ενώ ε είναι ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός.

Βιβλιογραφία

- Jacquet-Lagreze, E., & Siskos, J. (1982). Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method. European journal of operational research, 10(2), 151-164.
- Siskos, Y., & Yannacopoulos, D. (1985). UTASTAR: An ordinal regression method for building additive value functions. Investigaçao Operacional, 5(1), 39-53.
- Siskos, Y., & Grigoroudis, E. (2010). New trends in aggregation-disaggregation approaches. In Handbook of multicriteria analysis (pp. 189-214). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Papapostolou, A., Karakosta, C., Nikas, A., & Psarras, J. (2017). Exploring opportunities and risks for RES-E deployment under Cooperation Mechanisms between EU and Western Balkans: A multi-criteria assessment. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 80, 519-530.
- Nikas, A., Doukas, H., Siskos, E., & Psarras, J. (2018). International Cooperation for Clean Electricity: A UTASTAR Application in Energy Policy. In Preference Disaggregation in Multiple Criteria Decision Analysis (pp. 163-186). Springer, Cham.
- Siskos, Y., Grigoroudis, E., & Matsatsinis, N. F. (2005). UTA methods. In Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys (pp. 297-334). Springer, New York, NY.