

ΕΝΟΤΗΤΑ 8

Θεωρία σχέσεων υπεροχής

Εισαγωγή

Η ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité) αποτελεί μια οικογένεια μεθόδων πολυκριτήριας ανάλυσης η οποία ξεκίνησε να αναπτύσσεται από τον Bernard Roy το 1968 ενώ εργαζόταν σε εταιρεία συμβούλων. Το αρχικό πλαίσιο της ELECTRE, στην πορεία του χρόνου εξελίχθηκε στην μέθοδο ELECTRE I, ενώ η εξέλιξη συνεχίστηκε με την ανάπτυξη παραπάνω παραλλαγών όπως οι ELECTRE II, ELECTRE III, ELECTRE IV, ELECTRE IS και η ELECTRE TRI με εφαρμογές σε διαφορετικούς τομείς των αποφάσεων.

Η οικογένεια ELECTRE ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των μεθόδων σχέσεων υπεροχής (outranking methods). Αυτό σημαίνει πως, σε αντίθεση με την πολυκριτήρια θεωρία χρησιμότητας που αναπτύσσεται μια συνάρτηση βαθμολόγησης των εναλλακτικών, οι διαφορετικές εναλλακτικές συσχετίζονται με την κατασκευή διμερών σχέσεων υπεροχής S βάσει κάποιων προκαθορισμένων κριτηρίων. Μια εναλλακτική x λέμε πως υπερέχει μιας δεύτερης εναλλακτικής y αν υπάρχουν αρκετοί λόγοι που να υποστηρίζουν πως η x είναι τουλάχιστον όσο καλή είναι η y και ταυτόχρονα δεν υπάρχουν σημαντικοί λόγοι που να υποστηρίζουν το αντίθετο:

$$x S y \Leftrightarrow \text{"Η εναλλακτική } x \text{ είναι εξίσου ή πιο καλή από την } y\text{"}$$

ELECTRE I

Η μέθοδος ELECTRE I αποτελεί μια απλή εκδοχή της οικογένειας. Με δεδομένο ένα σύνολο εναλλακτικών A , στόχος της μεθόδου δεν είναι να βρεθεί πάντα μια βέλτιστη εναλλακτική αλλά ένα υποσύνολο εναλλακτικών K όπου $K \subseteq A$ οι οποίες θα υπερέχουν των υπολοίπων. Το πρόβλημα ορίζεται από ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών και κριτηρίων με βάση τα οποία αξιολογείται κάθε μια από αυτές. Αρχικά πραγματοποιείται ο έλεγχος συμφωνίας και ασυμφωνίας για κάθε πιθανό ζεύγος εναλλακτικών επιλογών. Από το προηγούμενο βήμα προκύπτει τελικά ο πίνακας υπεροχής και το αντίστοιχο γράφημα υπεροχής από το οποίο προκύπτει το υποσύνολο των πιθανών "βέλτιστων" εναλλακτικών.

Η μέθοδος ELECTRE I με veto περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια για την εφαρμογή της:

1. Σχεδίαση του πίνακα απόφασης A , ο οποίος αποτελείται από εναλλακτικές, κριτήρια αξιολόγησης, βάρη και βέτο.

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{1n} \\ x_{m1} & x_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου A_1, A_2, \dots, A_m , $i = 1, 2, \dots, m$ είναι οι εναλλακτικές, C_1, C_2, \dots, C_n , $j = 1, 2, \dots, n$ είναι τα κριτήρια και x_{ij} είναι η επίδοση της εναλλακτικής A_i στο κριτήριο C_j .

Επιπλέον δίνονται τα βάρη w_1, w_2, \dots, w_n , $j = 1, 2, \dots, n$ για κάθε ένα από τα κριτήρια καθώς και οι αντίστοιχες τιμές veto v_1, v_2, \dots, v_n , $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Κατασκευή του πίνακα συμφωνίας εφαρμόζοντας τον έλεγχο συμφωνίας για κάθε ζευγάρι εναλλακτικών επιλογών του πίνακα A , βάσει του τύπου:

$$C(A_i, A_j) = \sum_{\forall k \in \{k | x_{ik} - x_{jk} \geq 0\}} w_k$$

3. Εφαρμογή του ελέγχου ασυμφωνίας για κάθε ζευγάρι εναλλακτικών επιλογών ως προς τα διαθέσιμα κριτήρια του πίνακα A , βάσει του τύπου:

$$D_k(A_i, A_j) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } x_{jk} - x_{ik} < v_k \\ 1, & \text{εάν } x_{jk} - x_{ik} \geq v_k \end{cases}$$

όπου $k = 1, 2, \dots, n$

4. Κατασκευή του πίνακα υπεροχής χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των ελέγχων συμφωνίας και ασυμφωνίας, με χρήση των παρακάτω τύπων:

$$A_i S A_j \Leftrightarrow C(A_i, A_j) \geq s \wedge D_k(A_i, A_j) = 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$O_{ij} = 1 \Leftrightarrow A_i S A_j$$

όπου s είναι το κατώφλι συμφωνίας που έχει οριστεί

5. Κατασκευή του γραφήματος υπεροχής χρησιμοποιώντας τον πίνακα υπεροχής που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα. Το γράφημα υπεροχής αποτελεί μια γραφική αναπαράσταση των εναλλακτικών που υπερισχύουν άλλων και ταυτόχρονα δεν υπολείπονται καμίας. Για την κατασκευή του ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

- Κάθε εναλλακτική επιλογή αποτελεί έναν κόμβο στο γράφημα

Κάθε σχέση υπεροχής $A_i S A_j$ αποτελεί κατευθυνόμενη ακμή από τον κόμβο A_i προς τον κόμβο A_j

ELECTRE Tri

Η μέθοδος ELECTRE Tri (Yu, 1992) χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων ταξινόμησης. Ένα πρόβλημα ταξινόμησης αποτελείται από ένα σύνολο εναλλακτικών επιλογών, οι οποίες αξιολογούνται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια, και ο σκοπός είναι να ταξινομηθούν σε προκαθορισμένες κατηγορίες. Η ταξινόμηση μιας εναλλακτικής πραγματοποιείται ανεξάρτητα και προκύπτει από τη σύγκρισή της με τα πρότυπα αναφοράς τα οποία καθορίζουν και τα όρια των κατηγοριών. Η συγκεκριμένη μέθοδος παρέχει δύο προσεγγίσεις, την αισιόδοξη και την

απαισιόδοξη. Πιο συγκεκριμένα, η απαισιόδοξη προσέγγιση χρησιμοποιείται όταν απαιτείται εφαρμογή μιας συντηρητικής πολιτικής ή όταν οι διαθέσιμοι πόροι είναι περιορισμένοι, ενώ η αισιόδοξη προσέγγιση χρησιμοποιείται για προβλήματα που ο λήπτης της απόφασης επιθυμεί να δώσει ένα συγκριτικό πλεονέκτημα σε κάποιες εναλλακτικές που παρουσιάζουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Η μέθοδος ELECTRE Τρι περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια για την εφαρμογή της:

1. Σχεδίαση του πίνακα απόφασης A , ο οποίος αποτελείται από εναλλακτικές και κριτήρια αξιολόγησης.

$$A = \begin{bmatrix} g_1(a_1) & g_n(a_1) \\ g_1(a_m) & g_n(a_m) \end{bmatrix}$$

όπου a_1, a_2, \dots, a_m , $i = 1, 2, \dots, m$ είναι οι εναλλακτικές, g_1, g_2, \dots, g_n , $j = 1, 2, \dots, n$ είναι τα κριτήρια και $g_j(a_i)$ είναι η επίδοση της εναλλακτικής a_i στο κριτήριο g_j .

2. Καθορισμός του πίνακα προτύπων B , ο οποίος αποτελείται από πρότυπα και κριτήρια αξιολόγησης. Βάσει του συγκεκριμένου πίνακα πραγματοποιείται η ταξινόμηση.

$$B = \begin{bmatrix} g_1(b_1) & g_n(b_1) \\ g_1(b_m) & g_n(b_m) \end{bmatrix}$$

όπου b_1, b_2, \dots, b_m , $h = 1, 2, \dots, m$ είναι τα πρότυπα, g_1, g_2, \dots, g_n , $j = 1, 2, \dots, n$ είναι τα κριτήρια και $g_j(b_h)$ είναι η τιμή του προτύπου b_h στο κριτήριο g_j .

Επιπλέον καθορίζονται τα βάρη w_1, w_2, \dots, w_n , $j = 1, 2, \dots, n$ για κάθε ένα από τα κριτήρια, τα κατώφλια αδιαφορίας q_1, q_2, \dots, q_n , $j = 1, 2, \dots, n$, τα κατώφλια προτίμησης p_1, p_2, \dots, p_n , $j = 1, 2, \dots, n$, καθώς και οι αντίστοιχες τιμές veto v_1, v_2, \dots, v_n , $j = 1, 2, \dots, n$.

3. Κατασκευή του πίνακα μερικών δεικτών συμφωνίας $c_j(a, b_h)$ και $c_j(b_h, a)$, βάσει του τύπου:

$$c_j(a, b_h) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } g_j(a) \leq g_j(b_h) - p_j(b_h) \\ \frac{g_j(a) - g_j(b_h) + p_j(b_h)}{p_j(b_h) - q_j(b_h)}, & \text{εάν } g_j(b_h) - p_j(b_h) < g_j(a) \leq g_j(b_h) - q_j(b_h) \\ 1, & \text{εάν } g_j(a) > g_j(b_h) - q_j(b_h) \end{cases}$$

4. Υπολογισμός των ολικών δεικτών συμφωνίας $C(a, b_h)$ και $C(b_h, a)$, βάσει του τύπου:

$$C(a, b_h) = \frac{\sum_{j=1}^n w_j c_j(a, b_h)}{\sum_{j=1}^n w_j}$$

5. Υπολογισμός των δεικτών ασυμφωνίας $d_j(a, b_h)$ και $d_j(b_h, a)$, βάσει του τύπου:

$$d_j(a, b_h) = \begin{cases} 0, & \text{εάν } g_j(a) > g_j(b_h) - p_j(b_h) \\ \frac{g_j(b_h) - g_j(a) - p_j(b_h)}{v_j(b_h) - p_j(b_h)}, & \text{εάν } g_j(b_h) - v_j(b_h) < g_j(a) \leq g_j(b_h) - p_j(b_h) \\ 1, & \text{εάν } g_j(a) \leq g_j(b_h) - v_j(b_h) \end{cases}$$

6. Υπολογισμός των δεικτών αξιοπιστίας $\sigma_i(a, b_h)$ και $\sigma_i(b_h, a)$, βάσει του τύπου:

$$\sigma_i(a, b_h) = C(a, b_h) \prod_{j \in \bar{F}} \frac{1 - d_j(a, b_h)}{1 - C(a, b_h)}$$

όπου $\bar{F} = \{j \in F \mid d_j(a, b_h) > C(a, b_h)\}$ και F το σύνολο των κριτηρίων αξιολόγησης.

7. Μετατροπή των παραπάνω σχέσεων υπεροχής σε πιο συμπαγείς δυαδικές σχέσεις υπεροχής, μέσω του κατωφλίου αποκοπής λ , το οποίο εκτιμάται ως η μικρότερη τιμή του δείκτη αξιοπιστίας, συμβατού με την υπόθεση ότι η εναλλακτική a υπερέχει του προτύπου b_h .

$$\sigma(a, b_h) \geq \lambda \Leftrightarrow a S b_h$$

Έτσι, εξάγονται οι ακόλουθες δυαδικές σχέσεις:

$$a / b_h \Leftrightarrow a S b_h \text{ και } b_h S a$$

$$a > b_h \Leftrightarrow a S b_h \text{ και όχι } b_h S a$$

$$a < b_h \Leftrightarrow \text{όχι } a S b_h \text{ και } b_h S a$$

$$a R b_h \Leftrightarrow \text{όχι } a S b_h \text{ και όχι } b_h S a$$

Βιβλιογραφία

- Roy, B. (1968). Classement et choix en présence de points de vue multiples: La méthode ELECTRE. La Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle (RIRO). 8.
- Roy, B. (1991). The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. Theory and Decision. 31.
- Shanian, A & Savadogo, Oumarou. (2006). ELECTRE I Decision Support Model for Material Selection of Bipolar Plates for Polymer Electrolyte Fuel Cells Applications. Journal of New Materials for Electrochemical Systems. 9.
- Γαρίτος, Ζ. (2012). Λήψη συλλογικών αποφάσεων με ασαφείς μεθόδους σχέσεων υπεροχής. Μεταπτυχιακή Διατριβή. Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Πληροφορικής.
- Pang, J., Zhang, G., & Chen, G. (2011). ELECTRE I Decision Model of Reliability Design Scheme for Computer Numerical Control Machine. Journal of Software. 6.

- Figueira, J., Mousseau, & V., Roy, B. (2005). *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer New York
- Tri method. In *Belief Functions: Theory and Applications* (pp. 401-408). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Mousseau, V., Slowinski, R., & Zielniewicz, P. (1999). ELECTRE TRI 2.0 a. methodological guide and user's manual. Document du LAMSADE, 111, 263-275.
- Yu, W. (1992). *Aide multicritère à la décision dans le cadre de la problématique du tri: concepts, méthodes et applications* (Doctoral dissertation, Université Paris IX-Dauphine).