



## ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ

# ΕΝΟΤΗΤΑ 12: ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ: Η ΑΥΓΜΕCON-R

*Πολυκριτηριακά Συστήματα Υποστήριξης Αποφάσεων, ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ*

Κατερίνα Φορούλη, Αλέξανδρος Νίκας, Χάρης Δούκας, Ιωάννης Ψαρράς

# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

---

## Κυριαρχούμενη (dominated) λύση

Έστω δύο εφικτές λύσεις  $a, b$  ενός προβλήματος πολυκριτηριακής ελαχιστοποίησης:

- Το  $a$  κυριαρχεί ισχυρώς ως προς το  $b$  αν  $f(a) < f(b)$
- Το  $a$  κυριαρχεί ασθενώς ως προς το  $b$  αν  $f(a) \leq f(b)$

## Αδύνατη λύση

Κάθε λύση η οποία δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος καλείται αδύνατη.

## Εναλλακτικό Βέλτιστο

Όταν η βέλτιστη τιμή μιας αντικειμενικής συνάρτησης προκύπτει από διαφορετικές λύσεις  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$  τότε λέμε ότι η συγκεκριμένη αντικειμενική συνάρτηση έχει  $k$  εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.

# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

---

## Λεξικογραφική Βελτιστοποίηση

Ο όρος αναφέρεται σε μια κατά στάδια βελτιστοποίηση προβλημάτων πολυκριτήριου (γραμμικού) προγραμματισμού.

1. Στο πρώτο στάδιο βελτιστοποιείται η πρώτη αντικειμενική συνάρτηση.
2. Αν υπάρχουν εναλλακτικά βέλτιστα αναζητείται μεταξύ αυτών, αυτό που βελτιστοποιεί τη δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση (δεύτερο στάδιο). Με σταθερή δηλαδή την βέλτιστη τιμή της πρώτης αντικειμενικής συνάρτησης επιδιώκεται η βελτιστοποίηση της δεύτερης.
3. Στη συνέχεια με σταθερές τις τιμές της πρώτης και της δεύτερης αντικειμενικής συνάρτησης επιδιώκεται η βελτιστοποίηση της τρίτης κ.ο.κ. μέχρι την τελευταία αντικειμενική συνάρτηση.

Το αποτέλεσμα της λεξικογραφικής βελτιστοποίησης για κάποια αντικειμενική συνάρτηση είναι η λύση εκείνη που βελτιστοποιεί τη συγκεκριμένη αντικειμενική συνάρτηση και παρουσιάζει τις καλύτερες δυνατές τιμές για τις υπόλοιπες αντικειμενικές συναρτήσεις με κάποια σειρά προτεραιότητας.

# ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ AUGMENTED E-CONSTRAINT

Γεννήτορας των αλγορίθμων τύπου AUGMECON είναι η μέθοδος των περιορισμών  $\epsilon$ -constraint.

Η μέθοδος  $\epsilon$ -constraint συνίσταται στην βελτιστοποίηση του πλέον επιθυμητού ή πρωτεύοντος κριτηρίου,  $f_p(x)$ , χειριζόμενοι τα υπόλοιπα κριτήρια ως μαθηματικούς περιορισμούς που φράσσονται από αντίστοιχα επιτρεπόμενα όρια,  $\epsilon_i$ .

Με τον τρόπο αυτό, το αρχικό πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης (έστω  $\max$ )

$$\max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)\}$$

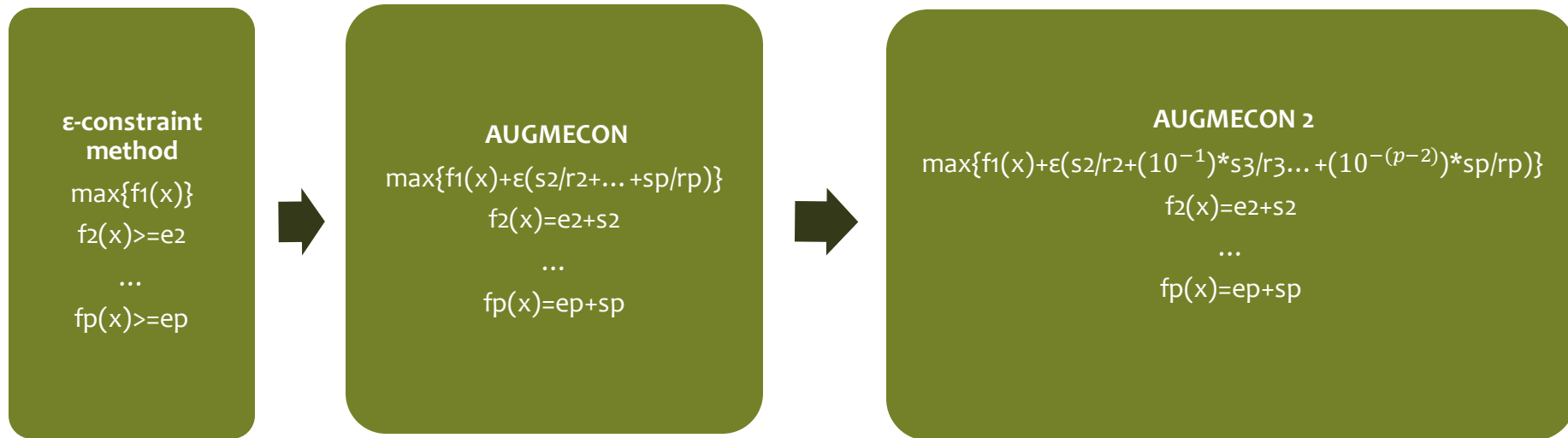
μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο βαθμωτό

$$\mathbf{Max}\{f_p(x)\}$$

με προσθήκη  $m - 1$  επιπλέον περιορισμών της μορφής:

$$f_i(x) \leq \epsilon_i \text{ για κάθε } i = 1, \dots, p - 1, p + 1, \dots, m$$

## ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΗΣ AUGMENTED E-CONSTRAINT



Η AUGMECON μετατρέπει τις ανισότητες σε ισότητες (για την αποφυγή dominated λύσεων) εισάγοντας τις κατάλληλες μεταβλητές απόκλισης  $s_i$  τόσο στις ισότητες όσο και στην ελεύθερη αντικειμενική προς βελτιστοποίηση ως σταθμισμένο άθροισμα ως προς το εύρος  $r_i$  της κάθε επιμέρους συνάρτησης  $f_i$ .

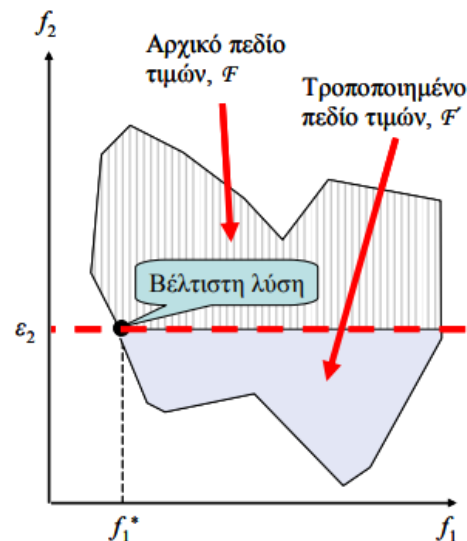
Η AUGMECON 2 θεωρεί φθίνουσες δυνάμεις του 10 ως πολλαπλασιαστές στο σταθμισμένο άθροισμα με στόχο την λεξικογραφική βελτιστοποίηση σε περίπτωση εναλλακτικού βελτίστου.

# ΑΠΟ ΤΗΝ Ε-CONSTRAINT ΣΤΗΝ ΑΥΓΜΕCON – ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Η επίλυση γίνεται με διαδοχικές επαναληπτικές βελτιστοποιήσεις για διαφορετικές τιμές των  $\epsilon_i$ . Σε κάθε επανάληψη το εκάστοτε  $\epsilon_i$  της αντικειμενικής συνάρτησης περιορισμού  $i$  αυξάνεται κατά σταθερό βήμα  $step_i$ .

Η αύξηση των ορίων των περιορισμών γίνεται διαδοχικά για κάθε αντικειμενική συνάρτηση, κρατώντας τα όρια των υπολοίπων περιορισμών σταθερά, με τη μορφή εμφωλευμένων βρόγχων.

Με κατάλληλη επιλογή των  $\epsilon_i$  και  $step_i$  η μέθοδος οδηγεί στην εύρεση του συνόλου των βέλτιστων λύσεων.



# ΑΠΟ ΤΗΝ Ε-CONSTRAINT ΣΤΗΝ AUGMECON

---

Η διαδικασία επίλυσης των AUGMECON και AUGMECON 2 βασίζεται επί της αρχής στη διαδικασία που παρουσιάστηκε για την ε-constraint.

Βασικές καινοτομίες:

- AUGMECON: **Αποφυγή dominated λύσεων** και αύξηση υπολογιστικής ταχύτητας χάρη στην **πρόωρη έξοδο** από τον πιο εσωτερικό βρόγχο επανάληψης σε περιπτώσεις όπου το πρόβλημα είναι **αδύνατο**.
- AUGMECON 2: Αύξηση υπολογιστικής ταχύτητας χάρη στην εκμετάλλευση του συντελεστή παράκαμψης - **bypass coefficient** που εφαρμόζεται στον πιο εσωτερικό βρόγχο επανάληψης.

# Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΔΥΝΑΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

**Π1**

$$\max z_1 = x_1$$

$$\max z_2 = x_2$$

$$\max z_3 = x_3$$

s. t.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \in R^+$$

**Π2**

$$\max z_1 = x_1$$

s. t.

$$x_2 \geq e_2$$

$$x_3 \geq e_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \in R^+$$

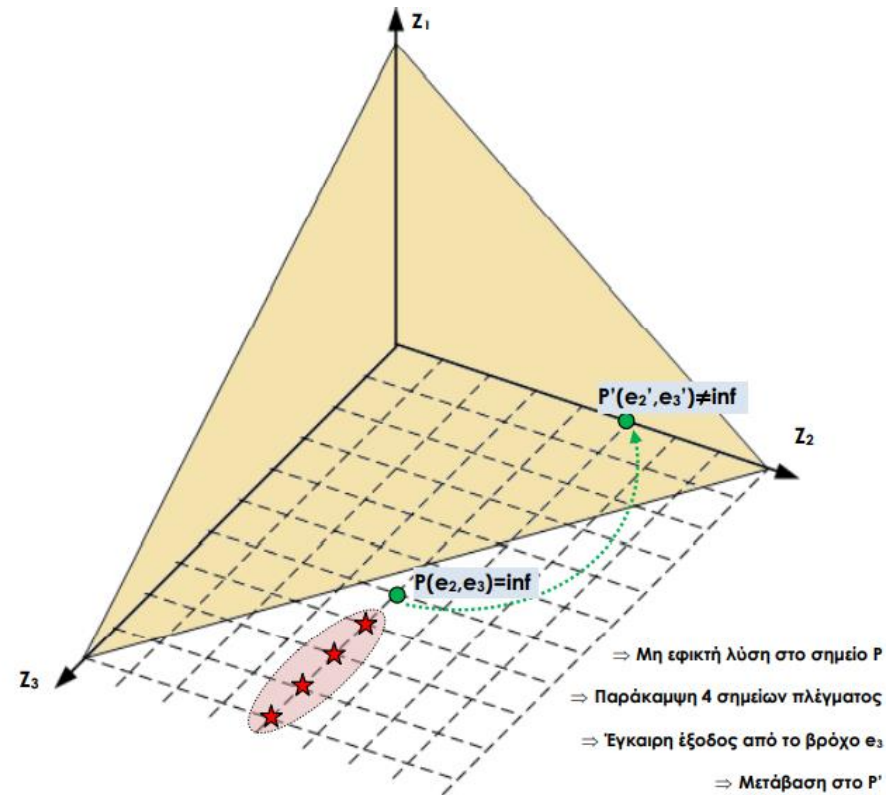
$$e_i \in [0,1], \text{ step}=0.1$$

$$e_2 = 0.5 \text{ και } e_3 = 0.6$$

Πιο εσωτερικός βρόγχος για  $z_3$

Παράκαμψη  $(e_2 = 0.5, e_3 = 0.7), (e_2 = 0.5, e_3 = 0.8), (e_2 = 0.5, e_3 = 0.9)$  κτλ

Επόμενο σημείο επίλυσης  $(e_2 = 0.5 + 0.1 = 0.6, e_3 = 0)$ .





## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

---

Έστω ότι στον πιο εσωτερικό βρόγχο επανάληψης βρίσκεται η συνάρτηση  $f_2(x)$ .

Τότε ο συντελεστής παράκαμψης ( $b$ )

**Ορίζεται ως:**  $b = \text{int}(s_2/\text{step}_2)$

**Υποδεικνύει:** πόσες βελτιστοποιήσεις οδηγούν στην ίδια βέλτιστη λύση και άρα μπορούν να παρακαμφθούν για να εξοικονομηθεί υπολογιστικός χρόνος.

Δηλαδή γίνεται μεταφορά από την επανάληψη  $i_2$  στην  $i'_2 = i_2 + b + 1$ , χωρίς την επίλυση των ενδιάμεσων προβλημάτων.

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

**Παράδειγμα:** Έστω το παρακάτω πρόβλημα με 3 αντικειμενικές συναρτήσεις ως περιορισμούς.

Αποτυπώνονται οι τιμές των ορίων  $e_i$  για δεδομένα σημεία εντός των βρόγχων επανάληψης. Θεωρείται  $step_i = 1$ .

Αντικειμενική Συνάρτηση	Μετρητής	Σημεία Επανάληψης										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_2(x)$	k	102	[103]	104	105	106	107	108	109	110	111	112
$f_3(x)$	j	77	78	79	[80]	81	82	83	84	85	86	87
$f_4(x)$	i	46	47	[48]	49	50	51	52	53	54	55	56

Έστω ένα συγκεκριμένο σημείο επίλυσης, όπου οι τιμές των μετρητών επανάληψης για κάθε αντικειμενική συνάρτηση είναι:

για την  $f_2(x)$ :  $k=1$ , για την  $f_3(x)$ :  $j=3$ , για την  $f_4(x)$ :  $i=2$

Τότε σύμφωνα με τον πίνακα:

$$e_2 = 103, e_3 = 80, e_4 = 48$$

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

---

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το αποτέλεσμα της βελτιστοποίησης για  $k=1$ ,  $j=3$ ,  $i=2$  είναι το εξής:

$$f_{2,1} = e_{2,1} + s_{2,1} = 103 + 4 = 107$$

$$f_{3,3} = e_{3,3} + s_{3,3} = 80 + 3 = 83$$

$$f_{4,2} = e_{4,2} + s_{4,2} = 48 + 4 = 52$$

**Πόσες επαναλήψεις θα γλιτώσει η AUGMECON-2 με εφαρμογή του συντελεστή παράκαμψης;**

Αρχικά υπολογίζουμε το συντελεστή παράκαμψης.

Από τον ορισμό:  $b = \text{int}(s_2 / \text{step}_2) = \text{int}(4/1) = 4$

Άρα οι επαναλήψεις για τις 4 επόμενες τιμές του  $e_2$  μπορούν να παρακαμφθούν γιατί οδηγούν στην ίδια λύση.

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

Για ποιο λόγο οι επόμενες επαναλήψεις οδηγούν στην ίδια λύση;

Η επόμενη επανάληψη της  $k=1, j=3, i=2$  είναι η  $k=2, j=3, i=2$ .

Δηλαδή είναι αυτή όπου αυξάνεται το όριο  $e_2$  του πιο εσωτερικού βρόγχου επανάληψης (που είναι αυτός της συνάρτησης  $f_2$ ) σε  $e_{2,2}=103+1=104$ , ενώ τα όρια  $e_3$  και  $e_4$  παραμένουν σταθερά και ίσα με:

$$e_{3,3}=80$$

$$e_{4,2}=48$$

Το αποτέλεσμα της νέας βελτιστοποίησης είναι:

$$f_{2,2}=e_{2,2}+s_{2,2}=104+3=107=f_{2,1}$$

$$f_{3,3}=e_{3,3}+s_{3,3}=80+3=83$$

$$f_{4,2}=e_{4,2}+s_{4,2}=48+4=52$$

Παρατηρείται ότι η αύξηση της τιμής του  $e_2$  (από 103 σε 104) έχει εξισορροπηθεί από την μείωση της τιμής του  $s_2$  (από 4 σε 3).

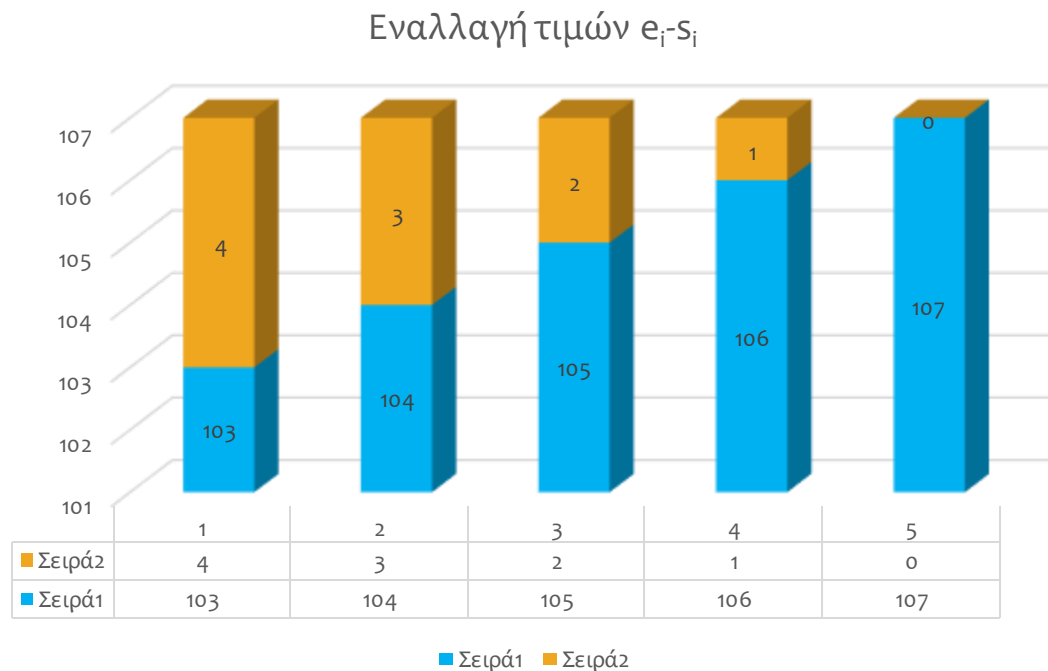
Αντίστοιχα για τις 3 επόμενες επαναλήψεις αύξησης του ορίου  $e_2$ , δηλαδή έως ότου το  $s_2$  μηδενιστεί, θα προκύψει και πάλι η ίδια τιμή για την  $f_2$ .

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

Ως εκ τούτου παρατηρείται η ύπαρξη συμπληρωματικότητας μεταξύ  $s_i$  και  $e_i$ .

Το  $s_i$  υποδεικνύει το περιθώριο αύξησης του  $e_i$  χωρίς να αλλάξει η λύση που προκύπτει από την βελτιστοποίηση.

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται εποπτικά ο τρόπος αυξομείωσης των  $e_i$  και των  $s_i$  του πιο εσωτερικού βρόγχου σε επαναλήψεις κατά τις οποίες η λύση της βελτιστοποίησης είναι η ίδια (στην προκειμένη περίπτωση 107).



## ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ ΤΗΣ AUGMECON - R

---

Η βασική αδυναμία της AUGMECON-2 είναι ο αυξημένος χρόνος επίλυσης ειδικά στις περιπτώσεις προβλημάτων με πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις.

Βασικός στόχος της μεθόδου AUGMECON – R είναι να μειώσει τον χρόνο της επίλυσης με την επίλυση ακριβώς τόσων μοντέλων βελτιστοποίησης, όσα και το πλήθος των προκύπτοντων βέλτιστων λύσεων.

Επιδιώκεται δηλαδή η πλήρης εξάλειψη περιττών βελτιστοποιήσεων, που οδηγούν σε αδύνατες ή ίδιες βέλτιστες λύσεις.

Οι δύο κύριες αιτίες περιττών βελτιστοποιήσεων είναι:

1. Εφαρμογή του συντελεστή παράκαμψης μόνο στον πιο εμφωλευμένο βρόγχο, αντί της πλήρους εφαρμογής του στο σύνολο των βρόγχων του προβλήματος.
2. Αδυναμία πρόβλεψης επιλύσεων βελτιστοποίησης που οδηγούν σε αδύνατες λύσεις.

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-R (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

Έστω πρόβλημα με 5 αντικειμενικές και έστω οι ακόλουθες επαναλήψεις προς εκτέλεση σε κάθε βρόγχο (θεωρείται  $\text{step}=1$ ):

Βρόγχος- Αντικειμενική Συνάρτηση	# επαναλήψεων εντός βρόγχου
1 <sup>ος</sup> (πιο εσωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_2$ )	0 1 2 3 4 5 6 7
2 <sup>ος</sup> (επόμενος εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_3$ )	0 1 2 3 4 5
3 <sup>ος</sup> (δεύτερος πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_4$ )	0 1 2 3
4 <sup>ος</sup> (πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_5$ )	0 1 2

Έστω ότι η επίλυση ξεκινά με τα παρακάτω όρια για κάθε αντικειμενική συνάρτηση περιορισμού:

$$e_2 = 16999, e_3 = 183, e_4 = 26, e_5 = 30$$

Έστω με πράσινο ένα ενδεικτικό σημείο της επίλυσης το οποίο θα εξεταστεί για χάριν παραδείγματος. Οπότε τα όρια των αντικειμενικών ισούται για το συγκεκριμένο σημείο με:

$$e_2 = 16999 + 1 = 17000, e_3 = 183 + 2 = 185, e_4 = 26 + 1 = 27, e_5 = 30 + 0 = 30$$

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-R (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕCΤΕC ΠΑΡΑΚΑΜΨΗC

---

ΈCτω επίCηC ότι τα αποτελέCματα που λαμβάνονται από την επίλυση του μοντέλου είναι τα εξήC:

$$f_2=17000+3=17003 \rightarrow s_2=3$$

$$f_3=185+2=187 \rightarrow s_3=2$$

$$f_4=27+1=28 \rightarrow s_4=1$$

$$f_5=30+1=31 \rightarrow s_5=1$$

Για  $step_i=1$ ,  $i=2,3,4,5$  οι συντελεCτές παράκαμψηC προκύπτουν:

$$b_2 = \text{int}(3/1)=3, b_3 = \text{int}(2/1)=2, b_4 = \text{int}(1/1)=1, b_5 = \text{int}(1/1)=1$$



# Η AUGMECON-R (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

---

Από τους συντελεστές παράκαμψης του προβλήματος η AUGMECON-2 θα χρησιμοποιήσει μόνο τον συντελεστή που αφορά τον πιο εσωτερικό βρόγχο επανάληψης, δηλαδή τον  $b_2$ .

Με αυτόν τον τρόπο παρακάμπτονται 3 επαναλήψεις, όπως δηλώνει το αποτέλεσμα  $b_2 = 3$ .

Ωστόσο το πρόβλημα μπορεί να επιταχυνθεί περαιτέρω, χρησιμοποιώντας τους συντελεστές παράκαμψης και των υπολοίπων συναρτήσεων ( $b_3 = 2, b_4 = 1, b_5 = 1$ )

Αυτή ακριβώς είναι η συνεισφορά της μεθόδου AUGMECON-R.

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-Ρ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

Συγκεκριμένα στο παράδειγμά μας η επίλυση θα παρακάμψει τις επαναλήψεις 2 3 4 του πιο εσωτερικού βρόγχου του προβλήματος και θα μεταβεί στην επανάληψη 5 – η οποία δίνει μια νέα λύση-.

Βρόγχος- Αντικειμενική Συνάρτηση	# επαναλήψεων εντός βρόγχου
1 <sup>ος</sup> (πιο εσωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_2$ )	0 <b>1 2 3 4</b> 5 6 7
2 <sup>ος</sup> (επόμενος εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_3$ )	0 1 <b>2</b> 3 4 5
3 <sup>ος</sup> (δεύτερος πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_4$ )	0 <b>1</b> 2 3
4 <sup>ος</sup> (πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_5$ )	<b>0</b> 1 2

Στη συνέχεια ο αλγόριθμος θα διατρέξει τις επαναλήψεις 6,7 οπότε τώρα ο μετρητής του αμέσως εξωτερικότερου βρόγχου θα αυξηθεί κατά 1, και η επόμενη θέση είναι η:

Βρόγχος- Αντικειμενική Συνάρτηση	# επαναλήψεων εντός βρόγχου
1 <sup>ος</sup> (πιο εσωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_2$ )	<b>0</b> 1 2 3 4 5 6 7
2 <sup>ος</sup> (επόμενος εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_3$ )	0 1 2 <b>3</b> 4 5
3 <sup>ος</sup> (δεύτερος πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_4$ )	0 <b>1</b> 2 3
4 <sup>ος</sup> (πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_5$ )	<b>0</b> 1 2

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-Ρ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

Η αμέσως επόμενη θέση είναι η:

Βρόγχος- Αντικειμενική Συνάρτηση	# επαναλήψεων εντός βρόγχου
1 <sup>ος</sup> (πιο εσωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_2$ )	0 <b>1</b> 2 3 4 5 6 7
2 <sup>ος</sup> (επόμενος εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_3$ )	0 1 2 <b>3</b> 4 5
3 <sup>ος</sup> (δεύτερος πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_4$ )	0 <b>1</b> 2 3
4 <sup>ος</sup> (πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_5$ )	<b>0</b> 1 2

Για την οποία:

$$e_2=17000$$

$$e_3=186 \text{ (γιατί ο μετρητής 3 έχει αυξηθεί κατά 1 - } e_3=185+1=186\text{),}$$

$$e_4=27$$

$$e_5=30$$

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-Ρ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕCΤΕC ΠΑΡΑΚΑΜΨΗC

---

Τα αποτελέCματα μετά την βελτιστοποίηση είναι τα εξής:

$$f_2=17000+3=17003 \rightarrow s_2=3$$

$$f_3=186+1=187 \rightarrow s_3=1$$

$$f_4=27+1=28 \rightarrow s_4=1$$

$$f_5=30+1=31 \rightarrow s_5=1$$

Παρατηρείτε ότι η λύση της βελτιστοποίησης είναι η ίδια και το μοναδικό μέγεθος που έχει αλλάξει είναι το  $s_3$  (μείωση κατά 1 μονάδα) και αντιστοιχεί στην αύξηση του  $e_3$  κατά 1 μονάδα.

Επομένως σύμφωνα και με τη λειτουργία που παρουσιάστηκε για τον συντελεστή παράκαμψης η συγκεκριμένη βελτιστοποίηση είναι περιττή, όπως υποδεικνύει και ο υπολογισμός  $b_3 = \text{int}(2/1)=2$ .

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-R (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

Από τον υπολογισμό  $b_3 = 2$  αναμένεται πως και για την αμέσως επόμενη αύξηση του ορίου  $e_3$ , κρατώντας σταθερά τα:

$$e_2 = 17000$$

$$e_4 = 27$$

$$e_5 = 30$$

Η επίλυση θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή το:

$$f_2 = 17000 + 3 = 17003 \rightarrow s_2 = 3$$

$$f_3 = 187 + 0 = 187 \rightarrow s_3 = 0$$

$$f_4 = 27 + 1 = 28 \rightarrow s_4 = 1$$

$$f_5 = 30 + 1 = 31 \rightarrow s_5 = 1$$

Η αύξηση του  $e_3$  θα εξισορροπηθεί με περαιτέρω μείωση του  $s_3$  σε 0.

Η παραπάνω λογική είναι η ίδια και για τις επόμενες επαναλήψεις.

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-Ρ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΠΑΡΑΚΑΜΨΗΣ

Στην επόμενη διαφάνεια παρουσιάζονται οι επαναλήψεις τις οποίες παρακάμπτει η AUGMECON – R, επιπλέον των επαναλήψεων που παρακάμπτονται από την AUGMECON 2.

Οι συγκεκριμένες, προς παράκαμψη, επαναλήψεις προκύπτουν ως αποτέλεσμα του υπολογισμού των συντελεστών παράκαμψης για το σημείο (1):

Βρόγχος- Αντικειμενική Συνάρτηση	# επαναλήψεων εντός βρόγχου
1 <sup>ος</sup> (πιο εσωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_2$ )	0 1 2 3 4 5 6 7
2 <sup>ος</sup> (επόμενος εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_3$ )	0 1 2 3 4 5
3 <sup>ος</sup> (δεύτερος πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_4$ )	0 1 2 3
4 <sup>ος</sup> (πιο εξωτερικός) βρόγχος (αντιστοίχιση με $f_5$ )	0 1 2

Για οποιοδήποτε άλλο σημείο το οποίο δίνει διαφορετική λύση από τη λύση του σημείου (1) υπολογίζονται εκ νέου οι συντελεστές παράκαμψης και οι νέες επαναλήψεις που παρακάμπτονται.

# Η ΑΥΓΜΕCΟΝ-R (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΣΥΝΤΕΛΕCΤΕC ΠΑΡΑΚΑΜΨΗC

---

Innermost loop 2: 0 **1** 2 3 4 5 6 7  
 Outer loop 3 : 0 1 2 **3** 4 5 (2 περιττές επαναλήψεις)  
 Outer loop 4 : 0 **1** 2 3  
 Outermost loop5: **0** 1 2

Innermost loop 2: 0 **1** 2 3 4 5 6 7  
 Outer loop 3 : 0 1 **2** **3** 4 5 (3 περιττές επαναλήψεις)  
 Outer loop 4 : 0 1 **2** 3  
 Outermost loop5: **0** 1 2

Innermost loop 2: 0 **1** 2 3 4 5 6 7  
 Outer loop 3 : 0 1 **2** **3** 4 5 (3 περιττές επαναλήψεις)  
 Outer loop 4 : 0 **1** 2 3  
 Outermost loop5: 0 **1** 2

Innermost loop 2: 0 **1** 2 3 4 5 6 7  
 Outer loop 3 : 0 1 **2** **3** 4 5 (3 περιττές επαναλήψεις)  
 Outer loop 4 : 0 1 **2** 3  
 Outermost loop5: 0 **1** 2

# Η AUGMECON-R (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΑΔΥΝΑΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

---

Εφαρμόζεται το προηγούμενο παράδειγμα για να μελετηθεί η παράκαμψη αδύνατων λύσεων μέσω της AUGMECON-R:

Έστω ότι η επόμενη θέση δίνει αδύνατη λύση:

Innermost loop 2: 0 1 2 3 4 **5** 6 7

Outer loop 3 : 0 1 2 3 **4** 5

Outer loop 4 : **0** 1 2 3

Outermost loop 5: 0 **1** 2

Η AUGMECON-2 οδηγεί στη θέση:

Innermost loop 2: **0** 1 2 3 4 5 6 7

Outer loop 3 : 0 1 2 3 4 **5**

Outer loop 4 : **0** 1 2 3

Outermost loop 5: 0 **1** 2



# Η AUGMECON-R (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ)

## ΑΔΥΝΑΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Για τις παρακάτω θέσεις κατά τις οποίες έχουν αυξηθεί τα όρια για τις αντικειμενικές συναρτήσεις «3» και «4» αντίστοιχα, η AUGMECON-2 θα επιλύσει εκ νέου το πρόβλημα.

Innermost loop 2: 0 1 2 3 4 **5** 6 7

Outer loop 3 : 0 1 2 3 4 **5**

Outer loop 4 : **0** 1 2 3

Outermost loop5: 0 **1** 2

Innermost loop 2: 0 1 2 3 4 **5** 6 7

Outer loop 3 : 0 1 2 3 **4** 5

Outer loop 4 : 0 **1** 2 3

Outermost loop5: 0 **1** 2

Αρχική θέση αδύνατης λύσης

Innermost loop 2: 0 1 2 3 4 **5** 6 7

Outer loop 3 : 0 1 2 3 **4** 5

Outer loop 4 : **0** 1 2 3

Outermost loop5: 0 **1** 2

Ωστόσο αυξάνοντας κατά μία μονάδα το όριο οποιασδήποτε αντικειμενικής συνάρτησης περιορισμού (διατηρώντας τα όρια των υπολοίπων αντικειμενικών ίδια ή μεγαλύτερα) οι περιορισμοί γίνονται πιο αυστηροί και άρα το πρόβλημα είναι αδύνατο.

Η AUGMECON 2 προβλέπει τις αδύνατες λύσεις για αύξηση του ορίου μόνο της αντικειμενικής συνάρτησης του πιο εσωτερικού βρόγχου.

Η AUGMECON-R προβλέπει τις αδύνατες λύσεις για αύξηση των ορίων κάθε αντικειμενικής συνάρτησης.

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

Θα δώσουμε άλλο ένα παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε πρόβλημα με 6 αντικειμενικές συναρτήσεις. Έστω επίσης ότι τα εύρη της κάθε μίας είναι:  $\text{range}_2=8$ ,  $\text{range}_3=6$ ,  $\text{range}_4=9$ ,  $\text{range}_5=5$ ,  $\text{range}_6=4$ .

Το πρόβλημα που καλείται να επιλύσει η AUGMECON είναι το εξής:

$$\text{Max}\{f_1(x)+(10^{-3})*[s_2/8+(10^{-1})*s_3/6+(10^{-2})*s_4/9+(10^{-3})*s_5/5+(10^{-4})*s_6/4]\}$$

$$f_2(x)=s_2+e_2$$

$$f_3(x)=s_3+e_3$$

$$f_4(x)=s_4+e_4$$

$$f_5(x)=s_5+e_5$$

$$f_6(x)=s_6+e_6$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

Όπου έστω ότι οι αρχικές τιμές των ορίων διαμορφώνονται ως εξής:

$$e_2 = 165, e_3 = 112, e_4 = 200, e_5 = 70, e_6 = 55$$

Έστω ότι η υπό εξέταση θέση είναι η εξής:

```
innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8
outer 3     : 0 1 2 3 4 5 6
outer 4     : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
outer 5     : 0 1 2 3 4 5
outermost 6: 0 1 2 3 4
```

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

Έστω τώρα ότι κάνοντας την βελτιστοποίηση λαμβάνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$f_2=168+4=172 \rightarrow s_2=4$$

$$f_3=114+2=116 \rightarrow s_3=2$$

$$f_4=203+2=205 \rightarrow s_4=2$$

$$f_5=71+1=72 \rightarrow s_5=1$$

$$f_6=55+2=57 \rightarrow s_6=2$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

Η κλασική AUGMECON 2 αυτό που θα έκανε είναι να χρησιμοποιήσει το  $b_2=4$  και να γλιτώσει τις επαναλήψεις 4, 5, 6, 7 του innermost loop πηγαίνοντας κατευθείαν στην 8.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε εποπτικά τις αχρείαστες επαναλήψεις που θα έδιναν την ίδια λύση (172, 116, 205, 72, 57) αλλά η AUGMECON-2 δεν θα τις γλιτώσει (ενώ η AUGMECON-R θα το κάνει επιτυχώς ). Τονίζουμε και πάλι ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι αντικειμενικές συναρτήσεις που έχουν τεθεί ως περιορισμοί για την κατανόηση του προβλήματος, για αυτό μιλάμε για πεντάδα λύσεων -ενώ στην ουσία έχουμε 6 αντικειμενικές-.

Με πράσινο χρώμα θα θεωρήσουμε τον δείκτη fixed δηλαδή πακτωμένο σε ένα σημείο ενώ με κίτρινο προσδιορίζουμε τις περιττές επαναλήψεις:

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (2 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6 : 0 1 2 3 4

innermost 2 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6 : 0 1 2 3 4

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 **4** 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 **2** 3 4 5

outermost 6: **0** 1 2 3 4

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 **5** 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 **2** 3 4 5

outermost 6: **0** 1 2 3 4



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 **5** 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 **1** 2 3 4 5

outermost 6:0 **1** 2 3 4

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 **2** 3 4 5

outermost 6:0 **1** 2 3 4

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 **4** 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 **2** 3 4 5

outermost 6:0 **1** 2 3 4

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 **5** 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 **2** 3 4 5

outermost 6:0 **1** 2 3 4

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 **5** 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 **1** 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 **2** 3 4

innermost 2: 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 **2** **3** **4** 5 6

outer 4 : 0 1 2 **3** 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 **2** 3 4 5

outermost 6: 0 1 **2** 3 4

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

---

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

innermost 2: 0 1 2 3 4 5 6 7 8

outer 3 : 0 1 2 3 4 5 6

outer 4 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 (3 περιττές επαναλήψεις)

outer 5 : 0 1 2 3 4 5

outermost 6: 0 1 2 3 4

---

Thank  
You!

---

**Forouli Katerina**

**Email:** [kfor@epu.ntua.gr](mailto:kfor@epu.ntua.gr)