ΕΝΟΤΗΤΑ 6
Μέθοδος VIKOR- Επεκτάσεις

Εισαγωγή

Στις κλασικές μεθόδους Πολυκριτήριας Ανάλυσης Αποφάσεων, οι βαθμολογίες του πίνακα απόφασης και τα βάρη των κριτηρίων είναι προσδιορισμένα με ακρίβεια. Ωστόσο, στον πραγματικό κόσμο, η ακριβής αναπαράσταση της γνώσης του αποφασίζοντα θεωρείται μάλλον μη ρεαλιστική υπόθεση. Για παράδειγμα, η ανθρώπινη κρίση σχετικά με τις προτιμήσεις είναι συχνά ασαφής. Επομένως, ο αποφασίζων δε μπορεί να τις εκφράσει με ακριβείς αριθμητικές τιμές.

Τις τελευταίες δεκαετίες, έχουν αναπτυχθεί διάφορες ασαφείς (fuzzy) και στοχαστικές μέθοδοι που περιγράφουν και διαχειρίζονται ικανοποιητικά τα ανακριβή και τα αβέβαια στοιχεία ενός προβλήματος απόφασης. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, δεν είναι πάντα εύκολο για τον αποφασίζοντα να προσδιορίσει μια συνάρτηση συμμετοχής ή μια κατανομή πιθανότητας. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ενδείκνυται η χρήση διαστημάτων, τα οποία μάλιστα μπορεί να εξυπηρετήσουν καλύτερα τον σκοπό.

Μέσα σε ένα περιβάλλον λήψης αποφάσεων, οι αριθμοί-διαστήματα (interval numbers) αποτελούν την απλούστερη μορφή αναπαράστασης της αβεβαιότητας. Έναντι των άλλων προσεγγίσεων, η χρήση αριθμών-διαστημάτων απαιτεί ελάχιστη ποσότητα πληροφορίας για τις τιμές των χαρακτηριστικών. Η θεώρηση ενός αριθμού-διαστήματος για μια παράμετρο του πίνακα απόφασης σημαίνει ότι η παράμετρος μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα στο διάστημα, χωρίς όμως να παρέχεται πληροφορία για το πόσο πιθανή είναι αυτή η τιμή.

Πέραν όμως των στοιχείων του πίνακα απόφασης, τα βάρη των κριτηρίων αποτελούν επίσης καθοριστικό παράγοντα για την τελική επιλογή μιας εναλλακτικής. Και εδώ, πολλές φορές, είτε δεν ενδείκνυται, είτε δεν είναι δυνατή η χρήση αριθμητικών τιμών με ακρίβεια. Επιπλέον, τέτοια δεδομένα είναι δύσκολο να συλλεχθούν για διάφορους λόγους: έλλειψη χρόνου, περιορισμένη πληροφόρηση, κλπ. Επομένως, η χρήση ελλιπών βαρών (incomplete weights), όχι μόνο είναι πιο ρεαλιστική υπόθεση, αλλά μειώνει και τον φόρτο συγκέντρωσης δεδομένων.

Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν δύο μεθοδολογίες:

- Η πρώτη αφορά μια επέκταση της μεθόδου VIKOR θεωρώντας ότι οι τιμές του πίνακα απόφασης είναι αριθμοί-διαστήματα.

- Στη δεύτερη, παρουσιάζεται το πρόβλημα απόφασης με ελλιπή πληροφόρηση ως προς τα βάρη (incomplete information criteria weights). Για τη διαχείρισή του, αναπτύσσεται η μέθοδος των ακραίων σημείων (extreme points method) μέσα στα πλαίσια της προσέγγισης VIKOR.

Μέρος Ι. Πίνακας Απόφασης με Αβέβαια Στοιχεία: Μεθοδολογία

Ένας πίνακας απόφασης με αριθμούς-διαστήματα έχει την ακόλουθη μορφή:

	C_1	C_2	…	C_n
A_1	$[f_{11}^L, f_{11}^U]$	$[f_{12}^L, f_{12}^U]$	…	$[f_{1n}^L, f_{1n}^U]$
A_2	$[f_{21}^L, f_{21}^U]$	$[f_{22}^L, f_{22}^U]$	…	$[f_{2n}^L, f_{2n}^U]$
…	…	…	…	…
A_m	$[f_{m1}^L, f_{m1}^U]$	$[f_{m2}^L, f_{m2}^U]$	…	$[f_{mn}^L, f_{mn}^U]$

(Πίνακας Απόφασης)

όπου $A_1, A_2, \dots, A_m$ είναι οι διαθέσιμες εναλλακτικές, $C_1, C_2, \dots, C_n$ είναι τα κριτήρια και $f_{ij} \in \left[f_{ij}^L, f_{ij}^U\right]$ είναι η επίδοση της εναλλακτικής A_i έναντι του κριτηρίου C_j, η οποία μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα στο διάστημα. Δίνονται επίσης τα βάρη

$$(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

που εκφράζουν τη σχετική σπουδαιότητα των κριτηρίων και ικανοποιούν τα εξής:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \qquad \text{και} \qquad w_j \geq 0, \;\; j = 1, \dots, n$$

Η προσέγγιση VIKOR περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Προσδιορισμός της θετικής ιδεατής λύσης και της αρνητικής ιδεατής λύσης:

$$A^* = \{f_1^*, \dots, f_n^*\} = \left\{ \left(\max_i f_{ij}^U : j \in I \right) \;\; ή \;\; \left(\min_i f_{ij}^L : j \in J \right) \right\}$$

$$A^- = \{f_1^-, \dots, f_n^-\} = \left\{ \left(\min_i f_{ij}^L : j \in I \right) \; ή \; \left(\max_i f_{ij}^U : j \in J \right) \right\}$$

όπου I είναι τα κριτήρια οφέλους και J είναι τα κριτήρια κόστους. Προφανώς $|I| + |J| = n$.

2. Για κάθε εναλλακτική, προσδιορίζουμε το διάστημα $S_i = \left[S_i^L, S_i^U\right]$ από τις σχέσεις:

$$S_i^L = \sum_{j \in I} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}^U}{f_j^* - f_j^-} + \sum_{j \in J} w_j \frac{f_{ij}^L - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}, \qquad i = 1, \dots, m$$

$$S_i^U = \sum_{j \in I} w_j \frac{f_j^* - f_{ij}^L}{f_j^* - f_j^-} + \sum_{j \in J} w_j \frac{f_{ij}^U - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}, \qquad i = 1, \dots, m$$

3. Η εναλλακτική A' που αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή S είναι η λύση συμβιβασμού. Προσοχή! Έχουμε να διαχειριστούμε αριθμούς-διαστήματα!

Στο βήμα 3 της μεθοδολογίας, θα πρέπει να συγκρίνουμε αριθμούς-διαστήματα. Για τον σκοπό αυτό, προτείνεται η παρακάτω μέθοδος σύγκρισης τέτοιων «αριθμών».

Σύγκριση αριθμών-διαστημάτων. Έστω δύο αριθμοί-διαστήματα $[a^L, a^U]$ και $[b^L, b^U]$ από τους οποίους θέλουμε να επιλέξουμε τον μικρότερο. Έστω επίσης $0 < K \leq 1$.

Περιπτώσεις:

i. Αν δεν τέμνονται, τότε ο μικρότερος αριθμός-διάστημα είναι αυτός που έχει τις μικρότερες τιμές. Δηλ. αν $a^U \leq b^L$, τότε επιλέγεται ο $[a^L, a^U]$ ως ο μικρότερος αριθμός-διάστημα.
ii. Αν οι δύο αριθμοί-διαστήματα ταυτίζονται, τότε έχουν την ίδια προτεραιότητα.
iii. Αν $a^L \leq b^L < b^U \leq a^U$, τότε εργαζόμαστε ως εξής: αν ισχύει
$$K(b^L - a^L) \geq (1 - K)(a^U - b^U)$$
τότε ο $[a^L, a^U]$ είναι ο μικρότερος αριθμός-διάστημα. Αλλιώς, είναι ο $[b^L, b^U]$.
iv. Αν $a^L < b^L < a^U < b^U$, τότε εργαζόμαστε ως εξής: αν ισχύει
$$K(b^L - a^L) \geq (1 - K)(b^U - a^U)$$
τότε ο $[a^L, a^U]$ είναι ο μικρότερος αριθμός-διάστημα. Αλλιώς, είναι ο $[b^L, b^U]$.

Ο αριθμός $0 < K \leq 1$ εκφράζει το επίπεδο αισιοδοξίας του αποφασίζοντα. Συνήθως επιλέγεται $K = 0.5$ (ορθολογικός αποφασίζων).

Συνοψίζοντας, επειδή ο προσδιορισμός τιμών με ακρίβεια είναι δύσκολος, αν όχι αδύνατος, συνιστάται η χρήση αριθμών-διαστημάτων. Σε αυτό το μέρος, παρουσιάσαμε την επεκτεταμένη μέθοδο VIKOR για προβλήματα Πολυκριτήριας Ανάλυσης Αποφάσεων με αριθμούς-διαστήματα, η οποία βασίζεται στην έννοια της εγγύτητας από τη θετική ιδεατή λύση. Υπολογίσαμε τα S ως αριθμούς-διαστήματα και καταλήξαμε σε μια συμβιβαστική λύση συγκρίνοντας τέτοιους «αριθμούς», η οποία εξαρτάται από το επίπεδο αισιοδοξίας K του αποφασίζοντα. Προφανώς, στο ίδιο πνεύμα, μπορεί κάποιος να προχωρήσει περαιτέρω και να αξιοποιήσει μέτρα τύπου R και Q (βλ. Kim & Ahn (2019)).

Μέρος ΙΙ. Βάρη με Ελλιπή Πληροφόρηση: Μεθοδολογία

Θεωρούμε έναν πίνακα απόφασης με **ακριβή στοιχεία**, όπως είναι ο ακόλουθος:

	$\boldsymbol{C_1}$	$\boldsymbol{C_2}$	…	$\boldsymbol{C_n}$
$\boldsymbol{A_1}$	f_{11}	f_{12}	…	f_{1n}
$\boldsymbol{A_2}$	f_{21}	f_{22}	…	f_{2n}
…	…	…	…	…
$\boldsymbol{A_m}$	f_{m1}	f_{m2}	…	f_{mn}

(Πίνακας Απόφασης)

όπου $A_1, A_2, \dots, A_m$ είναι οι διαθέσιμες εναλλακτικές, $C_1, C_2, \dots, C_n$ είναι τα κριτήρια και f_{ij} είναι η επίδοση της εναλλακτικής A_i έναντι του κριτηρίου C_j.

Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι τα βάρη των κριτηρίων δεν είναι σαφώς καθορισμένα, αλλά παρέχονται με ελλιπή πληροφόρηση (incomplete information criteria weights). Θεωρούμε την πιο διαδεδομένη μορφή ελλιπούς πληροφόρησης, αυτή των ασθενών ανισοτήτων (weak inequalities). Πιο συγκεκριμένα, τα βάρη

$$(w_1, \dots, w_n)$$

ικανοποιούν τα εξής:

(i) $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n \geq 0$

(ii) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

Για την αξιολόγηση των εναλλακτικών, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ακραίων σημείων (extreme points method). Γενικά, ελλιπή βάρη της παραπάνω μορφής οδηγούν σε σύνολα για τα οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε ακραία σημεία (Ahn (2015)). Για ένα σύνολο βαρών

$$(w_1, \dots, w_n)$$

που ικανοποιούν τις (i) και (ii), τα ακραία σημεία είναι τα εξής:

$$\lambda_1 = (1,0,0,\dots,0)$$

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{n-1} = \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}, 0\right)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

Η προσέγγιση VIKOR για ελλιπή βάρη περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

1. Γράφουμε τον πίνακα:

$$\boldsymbol{E} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

ο οποίος έχει ως στήλες τα ακραία σημεία, δηλ.

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 0 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 0 & 0 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/n \end{pmatrix}$$

2. Έστω I το σύνολο των κριτηρίων οφέλους και J το σύνολο των κριτηρίων κόστους. Για κάθε εναλλακτική, γράφουμε το διάνυσμα:

$$\boldsymbol{d_i} = (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in})$$

όπου

$$d_{ij} = \frac{f_j^* - f_{ij}}{f_j^* - f_j^-} \quad όταν\ \ j \in I$$

και

$$d_{ij} = \frac{f_{ij} - f_j^*}{f_j^- - f_j^*} \quad όταν\ \ j \in J$$

Παρατηρούμε ότι κάθε συνιστώσα του διανύσματος $\boldsymbol{d_i}$ εκφράζει την κανονικοποιημένη απόκλιση από την καλύτερη τιμή του κριτηρίου.

Προσοχή! Η σειρά με την οποία «μπαίνουν» οι συνιστώσες d_{ij} μέσα στο διάνυσμα $\boldsymbol{d_i}$ εξαρτάται από τη σχετική σπουδαιότητα των κριτηρίων. Εδώ, το διάνυσμα $\boldsymbol{d_i}$ έχει την παραπάνω μορφή επειδή ακριβώς υποθέσαμε στην αρχή ότι

$$w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$$

Αν όμως, π.χ. σε ένα πρόβλημα με 7 κριτήρια είχαμε μια άλλη διάταξη των βαρών, όπως είναι η παρακάτω

$$w_3 \geq w_1 \geq w_4 \geq w_2 \geq w_7 \geq w_5 \geq w_6$$

τότε το διάνυσμα $\boldsymbol{d_i}$ θα ήταν

$$\boldsymbol{d_i} = (d_{i3}, d_{i1}, d_{i4}, d_{i2}, d_{i7}, d_{i5}, d_{i6})$$

3. Για κάθε εναλλακτική, υπολογίζουμε το διάστημα

$$S_i = \left[S_i^L, S_i^U\right]$$

από τις σχέσεις

$$S_i^L = \min\{\boldsymbol{d_i E}\}$$

$$S_i^U = \max\{\boldsymbol{d_i E}\}$$

4. Η εναλλακτική A' που αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή S είναι η λύση συμβιβασμού. Προσοχή! Έχουμε να διαχειριστούμε αριθμούς-διαστήματα! Η διαδικασία διαχείρισης αυτών των «αριθμών» είναι η ίδια με αυτή που ακολουθήθηκε στο Μέρος Ι.

Παρατήρηση. Όπως βλέπουμε από τη μεθοδολογία, οι εναλλακτικές αξιολογήθηκαν με βάση μόνο το μέτρο S. Προφανώς, στο ίδιο πνεύμα, μπορεί κάποιος να προχωρήσει περαιτέρω και να αξιοποιήσει μέτρα τύπου R και Q (βλ. Kim & Ahn (2019)).

Βιβλιογραφία

- Duckstein L. & Opricovic S. (1980). Multiobjective optimization in river basin development, Water Resources Research 6 (1), 14-20.

- Opricovic, S. (1998). Multicriteria optimization of civil engineering systems. Faculty of Civil Engineering, Belgrade, 2 (1), 5–21 .
- Opricovic, S. , & Tzeng, G. H. (2004). Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS. European Journal of Operational Research 156 (2), 445–455 .
- Opricovic, S. & Tzeng, G. H. (2007). Extended VIKOR method in comparison with outranking methods. European Journal of Operational Research, 178 (2), 514–529 .
- Sayadi M.K., Heydari M. & Shahanaghi K. (2009). Extension of VIKOR method for decision making problem with interval numbers, Applied Mathematical Modelling 33 (5), 2257-2262.
- Ahn B.S. (2015). Extreme point-based multi-attribute decision analysis with incomplete information, European Journal of Operational Research, 240 (3), 748-755.
- Kim J.H. & Ahn B.S. (2019). Extended VIKOR method using incomplete criteria weights, Expert Systems with Applications, 126, 124-132.